Løsningsforslag eksamensoppgaver

(1)

Med $P = e^{y^2-x^2}\cos 2xy$ og $Q = e^{y^2-x^2}\sin 2xy$ finner vi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{y^2-x^2}(-2x\sin 2xy + 2y\cos 2xy) - e^{y^2-x^2}(2y\cos 2xy - 2x\sin 2xy) = 0.$$

Siden C er randkurven til et område R, følger det av Greens teorem at

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0.$$

(2)

a Ligningen for R_a er $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, som forenkles til $x^2 + y^2 = 2ay$. I polarkoordinater blir dette $r^2 = 2ar\sin\theta$, det vil si $r = 2a\sin\theta$. Sirkelen ligger i øvre halvplan og tangerer x-aksen i origo, så θ skal variere over intervallet $[0, \pi]$. Dermed blir

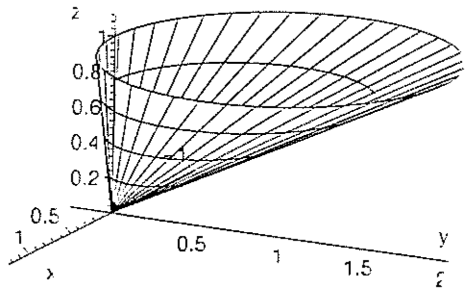
$$\begin{aligned}
\iint_{R_a} (x^2+y^2)\,dA &= \int_0^\pi \int_0^{2a\sin\theta} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^\pi \left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^{2a\sin\theta} d\theta \\
&= 4a^4 \int_0^\pi \sin^4\theta\,d\theta = a^4\left[-\sin^3\theta\cos\theta\right]_0^\pi + 3a^4\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta \\
&= 0 - \tfrac{3}{2}a^4\left[\sin\theta\cos\theta\right]_0^\pi + \tfrac{3}{2}a^4\int_0^\pi \sin^0\theta\,d\theta \\
&= 0 + \tfrac{3}{2}a^4\int_0^\pi d\theta = \tfrac{3}{2}\pi a^4.
\end{aligned}$$

b Det oppgitte integralet er på formen $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ med $P = e^x - y^3$ og $Q = x^3 - e^y$. Vi kan bruke Greens teorem på området R_1 (samme notasjon som i punkt a):

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$
$$= \iint_{R_1} (3x^2 + 3y^2)\,dA = \tfrac{9}{2}\pi$$

ved resultatet fra punkt a.

c Et plan parallelt med xy-planet er gitt ved $z = a$. Setter vi inn dette i den gitte ligningen får vi $x^2 + y^2 = 2ay$, som er ligningen for randen til sirkelen R_a. Planet $z = a$ skjærer altså flaten i en sirkel med sentrum i $(0, a, a)$ og radius a. Det kan også være nyttig å merke seg at $x = 0$ innsatt i ligningen gir $y = 0$ eller $y = 2z$.



Med z-integralet ytterst får vi

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dV = \int_0^1 \iint_{R_z} (x^2 + y^2 + z^2)\,dA\,dz$$

Her må vi huske på at z er en konstant i det innerste integralet. Vi benytter resultatet fra punkt a:

$$\iint_{R_z} (x^2 + y^2 + z^2)\,dA = \iint_{R_z} (x^2 + y^2)\,dA + \iint_{R_z} z^2\,dA = \tfrac{3}{2}\pi z^4 + z^2\,\mathrm{areal}(R_z)$$
$$= \tfrac{3}{2}\pi z^4 + z^2\pi z^2 = \tfrac{5}{2}\pi z^4$$

og dermed

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dV = \tfrac{5}{2}\pi \int_0^1 z^4\,dz = \tfrac{1}{2}\pi.$$

KOMMENTAR: Vi kan stille opp og løse integralet med z-integralet innerst, men regningene blir noe mer komplisert.