Oppgaver, Lørdagsverksted 19.februar 2005

1) Finn vinkelen mellom **a** og **b**.

a) $\mathbf{a} = [2,4]$, $\mathbf{b} = [1,2]$

b) $\mathbf{a} = [3,1,2]$, $\mathbf{b} = [6,2,2]$

c) $\mathbf{a} = 3i-j+k$, $\mathbf{b} = k$

d) $\mathbf{a} = [-1,2,1]$, $\mathbf{b} = [1,-1,3]$

2) Dekomponer vektoren a i forhold til b.

a) $\mathbf{a} = [4,7]$, $\mathbf{b} = [1,1]$

b) $\mathbf{a} = [2,3,5]$, $\mathbf{b} = k$

c) $\mathbf{a} = i-j+k$, $\mathbf{b} = 2j$

3) Finn vektoren med lengde L og samme retning som v.

a) $L = 8$, $\mathbf{v} = [1,1]$

b) $L = 2$, $\mathbf{v} = [2,3]$

c) $L = 0$, $\mathbf{v} = [1,2,3]$

4) Vis at $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ for vektorer fra $\mathbb{R}^3$.

5) Parametriser den gitt kurven i $\mathbb{R}^2$.

a) Den rette linjen gjennom origo med stigningstall 2.

b) Den rette linjen gjennom punktene (1,0) og (0,1)

c) Sirkelen med sentrum i (0,1) og radius 1.

6) To partikler starter ved tidspunkt $t = 0$ på hver sin bevegelse $r = r_1(t)$ og $r = r_2(t)$.

Bestem eventuelle punkter der

(i) banene krysser hverandre og (ii) partiklene kolliderer.

a) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t) = [t, 2t^2]$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(t) = [\sqrt{3/2}\cos t, \sqrt{3/2}\sin t]$

b) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t) = [\sin t, \sin^2 t]$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(t) = [\cos^2 t, \sin^2 t]$

c) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(t) = [1+t, 5+3t]$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(t) = [3+\cos\pi t, 2+\sin\pi t]$

7) Finn lengden av den gitte kurven.

a) $\mathbf{r} = [3\cos t, 3\sin t]$, $0 \le t \le 2\pi$

b) $\mathbf{r} = [e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t]$, $0 \le t \le e]$

8) Vis at tangenten til en sirkel alltid står normalt på radien ut til tangeringspunktet.

Eksamensoppgaver

9) En kurve K i xy-planet har parameterfremstilling

$$x = t^3, \qquad y = 4 - t^2, \qquad 0 \le t \le 2.$$

Beregn arealet av området som begrenses av K og koordinataksene. Finn også buelengden til kurven K, svaret skal gis på eksakt form.

10) Gitt en plan kurve C med parameterfremstilling

$$x = \frac{1}{2}\sin 2t, \qquad y = 2\sqrt{2}\sin t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

a) Skisser C, og beregn lengden til C.

b) Bestem krumningen til C i punktet $(0, 2\sqrt{2})$.

11) La C være romkurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{2}t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \qquad -1 \le t \le 1.$$

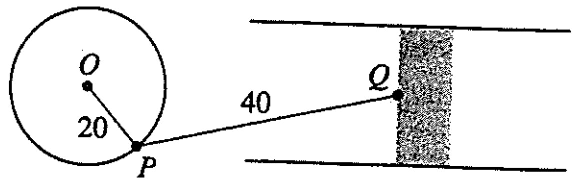
a) Finn buelengden til C.

b) Finn krumningen til C i et vilkårlig punkt på C, og bestem punktet på C der krumningen er størst.

12) En repetisjon

Husker du denne?

Et 40 cm langt stag forbinder stemplet i en forbrenningsmotor med et roterende hjul som vist på figuren.



Festepunktene for staget er P i ytterkant av hjulet og Q midt på overflaten av stemplet. Hjulet har sentrum i origo og radius 20 cm og roterer med konstant vinkelhastighet $\omega = 10\pi$ radianer per sekund mot klokken og Q glir på den positive x-aksen. Ved tidspunkt $t = 0$ ligger P på den positive x-aksen.

a) Finn koordinatene til P og Q som funksjon av tiden t.

b) Finn hastigheten til Q ved tidspunkt t.