Oppgaver, Lørdagsverksted 12.mars

1) Avgjør om kjeglesnittet er en ellipse, hyperbel eller parabel, og skisser kurven.

a) $9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y - 11 = 0$

b) $y^2 + x + 10y = 0$

c) $2x^2 + 12x - y = 1$

2) Parametriser kjeglesnittet.

a) $9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y - 11 = 0$

b) $4x^2 - y^2 + 10y - 21 = 0$

c) $x - 2y^2 + 4y - 5 = 0$

3) Gi polarkoordinater til punktet i planet med følgende kartesiske koordinater

a) $(1,1)$

b) $(1,\sqrt{3})$

c) $(-3,4)$

4) Skisser kurven.

a) $r^2 = 4\cos\theta$

b) $r = \theta$

5) a) Vis at buelengden til den glatte polarkurven $r = f(\theta)$ for $\alpha \le \theta \le \beta$ er

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta .$$

b) Bruk dette til å finne buelengden av $r = e^{\theta}$ for $0 \le \theta \le 2\pi$.

6) Finn alle de annen ordens partielle deriverte til funksjonen.

a) $x^7 y^3$

b) $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$

c) $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$

7) Vis at f er en løsning av den partielle differensiallligningen.

a) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$

b) $z = f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z\ln z$

8) Finn gradientvektoren til f.

a) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y, z) = e^{x^2 + yz}$

9) Finn ligningen for tangentplanet til grafen $z = f(x, y)$ i punktet $(a, b, f(a, b))$.

a) $f(x, y) = y\cosh x^2$, $\quad a = -1, b = -2$.

b) $f(x, y) = e^{x^2 + y}$, $\quad a = 2, b = -4$

c) $f(x, y) = \sqrt{5 + x^2 + y^2}$, $\quad a = 2, b = 4$

10) Finn $z'(t)$ når $z = f(\mathbf{x})$ der $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$, både ved å bruke kjerneregelen og ved å derivere funksjonen $z(t) = f(\mathbf{r}(t))$ direkte.

a) $f(x, y) = \sinh^{-1}(x^2 + y)$, $\quad x = e^t, y = e^{2t}$

b) $f(x, y, v) = \sqrt{x^2 + y^2 + v^2}$, $\quad x = t, y = t^2, v = \sqrt{t}$

11) Finn og klassifiser de kritiske punktene.

a) $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = \dfrac{e^{x^2 + y}}{3x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = y\ln(1 + x^2 + 2xy)$

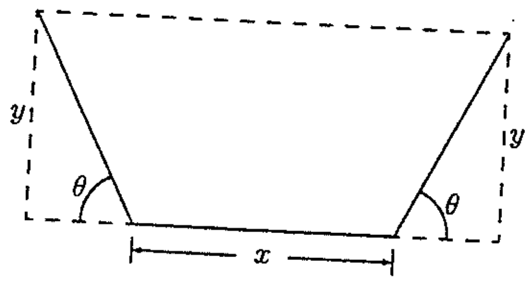
Eksamensoppgaver

1

Gitt funksjonen $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$, definert for alle punkter (x, y).
Bestem eventuelle kritiske punkter for f.
Avgjør om f har noen største eller minste verdi, og angi i så fall disse verdiene.

2

En åpen grøft har tverrsnitt formet som et trapes, som på figuren.



Det er gitt at tverrsnittet skal ha areal lik 1. Finn summen S av lengdene av de tre sidene i tverrsnittet uttrykt ved y og θ. Bestem x, y og θ slik at S blir minst mulig, og finn denne minste verdien til S. Det skal påvises at den funne verdien virkelig er den minste.