Oppgaver, Lørdagsverksted 9.april 2005

1) Beregn kurveintegralet $\int_C f\ ds$ der C er gitt ved $\mathrm{r} = \mathrm{r(t)}$ for $0 \le t \le a$.

a) $r(t) = [\mathrm{t}, \pi, \sqrt{4\text{-}\mathrm{t}^2}]$, $\mathrm{a} = 1$, $\mathrm{f(x,y,z) = xyz}$

2) Beregn massen til wiren langs kurven $\mathrm{r} = \mathrm{r(t)}$ for $a \le t \le b$ når massetettheten er δ.

a) $r(t) = [\mathrm{tcost,tsint}]$, $\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{b} = 4\pi$, $\delta = \sqrt{\mathrm{x}^2 + y^2}\,/8$

b) $r(t) = [\mathrm{e^t, te^t}]$, $\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{b} = 2$, $\delta = (\mathrm{x + y})/x^2$

3) Beregn arealet $\int_C h\ ds$ av et gjerde med høyde h som står på kurven gitt ved $\mathrm{r} = \mathrm{r(t)}$.

a) $r(t) = [\sqrt{2}\mathrm{t}, \ \mathrm{lnt}, \ \mathrm{t}^2/2]$, $\mathrm{a} = 1$, $\mathrm{b} = 4$, $\mathrm{h(x,y,z) = x}$

b) $r(t) = [\mathrm{tcost, \ tsint}, \ \frac{2}{3}\mathrm{t}^{3/2}]$, $\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{b} = 2$, $\mathrm{h(x,y,z)} = 1{+}2\sqrt{\mathrm{x}^2 + y^2}$

4) a) Vis at kurveintegralet $\int_C ds = \int_a^b dt = \mathrm{b - a}$ når C er det rette linjestykket fra a til b langs x-aksen.

5) Utnytt symmetrien til å forenkle dobbelintegralet.

a) $\iint_R x \sin y^2 dA$ der R er rektangelet $[-\pi, \pi] \times [0,1]$

b) $\iint_R y^2 \sin x dA$ der R er rektangelet $[0, \pi] \times [-1,1]$

6) Beregn dobbelintegralet $\iint_R f(x,y) dA$ ved å utnytte symmetrier og/eller kjente arealer.

a) R er sirkelskiven med sentrum i origo og radius a, $f(x,y) = 4$.

b) R er kvadratet med hjørner i $(-a,-a), (-a,a), (a,a)$ og $(a,-a), f(x,y) = xy$

7) Finn verdien av integralet ved å tolke det som et volum.

a) $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA$ der R er sirkelskiven med sentrum i origo og radius 2.

8) Beregn det itererte integralet.

a) $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \sin y \, dy dx$

b) $\int_0^1 \int_0^2 xy \ln(1+x^2) dx dy$

c) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_0^1 x \cos(xy) dy dx$

9) Beregn dobbelintegralet $\iint_R f(x,y) dA$.

a) $f(x,y) = \sin(x+y), R = [0,\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]$

b) $f(x,y) = x^2(1-y)$, R er begrenset av x-aksen og parabelen $y = 4 - x^2$

c) $f(x,y) = xy$, R er begrenset av kurvene $x = 4 - y^2$ og $x = 3y$

d) $f(x,y) = x - y^2$, R er området begrenset av kurvene $y = x^2$ og $y = x^3$

e) $f(x,y) = x \cos y$, R er området i første kvadrant begrenset av kurven $y = 1 - x^2$

10) Skisser integrasjonsområdet, og beregn integralet ved å bytte integrasjonsrekkefølgen i det itererte integralet.

a) $\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx dy$

b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sin(1+y^3) dy dx$

c) $\int_0^1 \int_0^{\arccos y} e^{\sin x} dx dy$

d) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{x}{y} e^y dy dx$

11) Beregn arealet $\iint_R dA$ av området R.

a) R er avgrenset av kurvene $y = x$ og $y = x^2$

b) R er avgrenset av kurvene $y = x^2$ og $y = 4$

12) Finn volumet av legemet avgrenset av de gitt flatene.

a) $x = 0, x = 1, y = 0, y = 4, z = 0, z = x^2 + y^2$

b) $x = 1, y = 0, y = x, z = 0, z = x^2$

13) Beregn $\iint_D f(x,y) dA$ i polarkoordinater.

a) $f(x,y)=x^2+y^2$, D er sirkelskiven med sentrum i origo og radius 2.

b) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$, D er halvsirkelskiven $x^2+y^2\le\pi, y\ge 0$

c) $f(x,y)=xy$, D er området innenfor kardioiden $r=1+\cos\theta$

d) $f(x,y)=5y^3$, D er området mellom kurvene $r=1$ og $r=1+\cos\theta$ i første kvadrant.

14) Innfør polarkoordinater og beregn verdien av integralet.

a) $$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sin(x^2+y^2)\,dydx$$

b) $$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}(x^2+y^2)^{3/2}\,dxdy$$

c) $$\int_0^1\int_x^1 xy/(x^2+y^2)^{3/2}\,dydx$$

15) La D være området gitt ved $0\le r\le f(\theta), \alpha\le\theta\le\beta$ i polarkoordinater, der $0\le\beta-\alpha\le 2\pi$. Vis at

$$\iint_D dA=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}f(\theta)^2\,d\theta .$$

Hvordan kan vi tolke denne formelen?

16) Beregn trippelintegralet $\iiint_T f(x,y,z)\,dV$.

a) $f(x,y,z)=x, T=[-1,1]\times[0,1]\times[0,3]$

b) $f(x,y,z)=x^2y, T=[-1,1]\times[0,1]\times[\pi,2\pi]$

17) Skisser området T begrenset av de gitte flatene, og finn volumet av T ved trippelintegrasjon.

a) $x+2y+3z=6, x=0, y=0, z=0$

b) $z=x, x=y^2, x=1, z=0$

Eksamensoppgaver

1. Beregn dobbeltintegralet

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\,dx\,dy$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

2. La A være området begrenset av linjene

$$y = x, \quad y = \sqrt{3}x, \quad x = 1 \;\text{ og }\; x = 3$$

med tetthet $\rho(x,y) = (x^2 + y^2)^{-3/2}$. Bruk polarkoordinater til å finne massen av A.