Oppgaver, lørdagsverksted 30.april

1) Illustrer følgende vektorfelt i planet grafisk ved å tegne noen typiske piler.

a) **F** $(x,y) = [y,-x]$

b) **F** $(x,y) = [\frac{x}{r}, \frac{y}{r}]$, der $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) **F** $(x,y) = [e^x, e^{-x}]$

2) Finn arbeidet $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ i **F** langs C.

a) **F** $(x,y) = [zx, yx, x]$, C er kurven parametrisert ved $x = t^2, y = 2t, z = t^3$ for $t \in [0,1]$.

b) **F** $(x,y) = [-y, x]$, C er den dele av enhetssirkelen $x^2 + y^2 = 1$ der $y \geq 0$, orientert mot klokken.

c) **F** $(x,y) = [-y, x, z]$, C er heliksen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, -\sqrt{5}t]$ for $t \in [0, 2\pi]$.

3) Finn gradientfeltet ∇f.

a) $f(x, y) = \sin(xy)$

b) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}$, der $p \neq 0$.

4) Finn potensialfunksjonene til **F.**

a) **F** $(x,y) = [3x^2y + 1, x^3]$

b) **F** $(x,y) = [2x\sin(xy) + x^2y\cos(xy), x^3\cos(xy)]$

c) **F** $(x,y,z) = [2xz, 1 - z^2, x^2 - 2yz]$

5) Avgjør om **F** er konservativt, og finn potensialfunksjonene om de eksisterer.

a) **F** $(x,y) = [y\sin y - 1, x\cos y + y\sin x]$

b) **F** $(x,y) = [x, y, z]$

6) Betrakt de to vektorfeltene

F $(x,y,z) = [ze^x \sin y, ze^x \cos y, e^x \sin y]$

G $(x,y,z) = [ze^x \sin y, ze^x \cos y, 1 + e^x \sin y]$

a) Vis at **F** er konservativt.

b) Beregn $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ og $\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ når C er kurven

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = [t^2 \arctan t, \ln t, \sqrt{1+t^2}]$ for $0 \leq t \leq \sqrt{3}$.

7) Bruk Greens teorem til å regne ut $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds$, der den lukkede kurven C er positivt orientert.

a) $\mathbf{F} = [2xy, x^2]$, C er ellipsen $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.

b) $\mathbf{F} = [x^2 + 2y, x + y^2]$, C er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

c) $\mathbf{F} = [x + e^{x^2}, e^{x^3}]$, der C er randen til rektanglet $[-1,1]\times[-2,3]$.

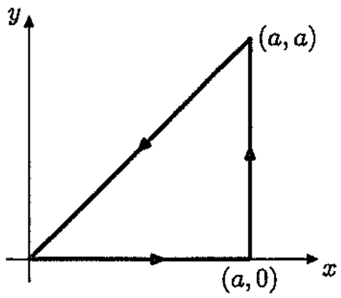
d) $\mathbf{F} = [x, x^3 y]$, der C er randen til trekanten med hjørner i (0,2), (2,0) og (-2,0).

e) $\mathbf{F} = [x + y, xy]$, C er randen til området gitt ved $x^2 \leq y \leq 4$.

8) Beregn $\oint_C (ay+b)dx + (cx+d)dy$ når C er en enkel, glatt kurve med positiv omløpsretning som omslutter et område med areal A.

Eksamensoppgaver

1



Finn verdien av integralet

$$\oint_C e^{y^2-x^2}\cos 2xy\,dx + e^{y^2-x^2}\sin 2xy\,dy$$

der C er den lukkede kurven antydet i figuren, og a er en positiv konstant.

2

La a være et positivt tall, og la R_a være sirkelskiven med senter i $(0,a)$ og radius a.

a) Vis, for eksempel ved å bruke polarkoordinater, at

$$\iint_{R_a}(x^2+y^2)\,dA = \tfrac{3}{2}\pi a^4.$$

(Oppgitt formel: $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$.)

b) Finn verdien av linjeintegralet

$$\oint_C (e^x - y^3)\,dx + (x^3 - e^y)\,dy$$

der C er sirkelen med senter i $(0,1)$ og radius 1, orientert mot urviseren.

c) La S være flaten med ligning $x^2+y^2-2yz=0$, $0\le z\le 1$. Skisser S ved bl.a. å finne skjæringskurvene mellom S og plan parallelle med xy-planet. Beregn trippelintegralet

$$\iiint_T (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

der T er begrenset av S og planet $z=1$.