TMA4105 Matematikk 2
vår 2005

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 10

Oppgavene er hentet fra Lorentzen et al. (LHL).

$\boxed{1}$ (LHL 12.1.5e) Finn arbeidet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

i $\mathbf{F}$ langs C hvor $\mathbf{F}(x,y,z) = [xyz, z, y]$, C er den delen av skjæringskurven mellom paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ og yz-planet der $z \geq 0$, orientert i retning økende y.

$\boxed{2}$ (LHL 12.1.11) Et fly flyr langs kurven C gitt ved $\mathbf{r} = [a+R\cos t, b+R\sin t, c]$ for $0 \leq t \leq \pi/2$, der c er en positiv konstant. Det er sterk vind i området. Den øver en kraft $F(x,y,z) = k[xz, zy, 1/z]$ på flyet, det k er en positiv konstant. Under hvilke betingelser for a, b, c og R vil flyet spare brennstoff på grunn av vinden?

$\boxed{3}$ (LHL 12.2.8) Betrakt de to vektorfeltene

$$\mathbf{F}(x,y,z) = [ze^x \sin y, ze^x \cos y, e^x \sin y]$$
$$\mathbf{G}(x,y,z) = [ze^x \sin y, ze^x \cos y, 1 + e^x \sin y]$$

a) Vis at F er konservativ.

b) Beregn $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ og $\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ når C er kurven

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = [t^2 \tan^{-1} t, \ln t, \sqrt{1+t^2}] \text{ for } 1 \leq t \leq \sqrt{3}.$$

$\boxed{4}$ (LHL 12.3.6) Kurven C i planet, parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = [\cos^3 t. \sin^3 t]$ for $t \in [0, 2\pi)$, kalles en *astroide*.

a) Skisser C.

b) Bruk Greens teorem til å finne arealet av området innenfor C.

$\boxed{5}$ (LHL 12.3.16 a,b) La D være en plate i xy-planet med enkel, stykkevis glatt rand C. La D ha konstant massetetthet δ (masse per areal).

a) Vis at tyngdepunktet $(\bar{x}, \bar{y})$ til D er gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2\, dy \quad \text{og} \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2\, dx$$

der C er positivt orientert og A er arealet av D.

b) Vis at tyngdepunktet $(\tilde{x}, \tilde{y})$ til D i a) kan skrives

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \frac{\oint_C x^2\, dy}{\oint_C x\, dy}, \quad \tilde{y} = \frac{1}{2} \frac{\oint_C y^2\, dx}{\oint_C y\, dy}.$$

$\boxed{6}$ (LHL 12.4.2d) Bruk Stokes' teorem til å finne arbeidet

$$\mathbf{F} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

hvor C er snittet mellom paraboloiden $z = 4x^2 + 9y^2$ og planet $8x - 6y - z + 4 = 0$, orientert mot klokken sett ovenfra, og $\mathbf{F}(x, y, z) = [y, z^2, 2yz + x - y]$.

$\boxed{7}$ (LHL 12.4.5a) Avgjør om vektorfeltet $\mathbf{F}$ er konservativt på $\mathbb{R}^3$. Finn en potentialfunksjon for $\mathbf{F}$, dersom en slik eksisterer.

$$\mathbf{F} = [y \cos(xy), x \cos(xy) + z^2, 2yz].$$