**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

# EKSAMEN I FAG SIF5005/07 MATEMATIKK 2/2A

Mandag 17. august 1998
Tid: 0900–1400

Hjelpemidler: Typegodkjent kalkulator med tomt minne,
Rottmann: *Matematisk formelsamling*.

**Oppgave 1**

**a)** Finn, og klassifiser, de kritiske punktene for funksjonen

$$f(x,y) = xye^{-2x-3y}.$$

**b)** Kurven

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

er en ellipse med sentrum i origo og akser som ikke er parallelle med koordinataksene. Finn punktene på ellipsen som ligger nærmest origo og lengst vekk fra origo.

**Oppgave 2**

Gitt funksjonen

$$f(x,y,z) = \sin(xy + z^2 - 4x + 4y).$$

**a)** Finn gradienten $\nabla f(x,y,z)$. Regn ut den retningsderiverte til $f$ i origo i retning av vektoren $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Hva er den største retningsderiverte til $f$ i origo?

**b)** La $C$ betegne linjestykket fra origo til $(1, \pi/2, 2)$. Finn verdien av linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \cos(xy + z^2 - 4x + 4y)\big[(y-4)\mathbf{i} + (x+4)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\big].$$



**Oppgave 3**

Løs integralet

$$\int_2^e \int_{\ln x}^1 \frac{2xy}{e^y + 2}\, dy\, dx$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

**Oppgave 4**

**a)** La $R$ være et område i $xy$-planet, begrenset av en enkel lukket kurve $C$. Bruk ( teorem til å vise at koordinatene til arealsenteret (sentroiden) til $R$ er gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\, dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\, dx$$

der $A$ er arealet av $R$ og $C$ gjennomløpes mot urviseren.

**b)** Skisser den lukkede kurven $C$ med parameterfremstilling

$$x = t^2, \quad y = t^3 - t, \quad -1 \le t \le 1.$$

Beregn integralet $\oint_C x^2\, dy$ og finn, for eksempel ved hjelp av Pappus' første te volumet av rotasjonslegemet som dannes når området begrenset av $C$ dreies ‹ aksen.

**Oppgave 5**

Et legeme $T$ er begrenset av paraboloiden $z = 9 - x^2 - (y-1)^2$ og planet $z = 2y +$

**a)** Vis at projeksjonen av $T$ i $xy$-planet er en sirkeldisk med senter i origo. Finn vo av $T$.

**b)** La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x - yz)\mathbf{i}$, og la $S$ være overflaten Hva blir flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

når $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen til $S$ som peker ut av $T$?

Bestem også

$$\iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad \text{og} \qquad \iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

der $A$ er den delen av $S$ som ligger i planet $z = 2y + 4$, og $B$ er den delen av $S$ ligger på paraboloiden $z = 9 - x^2 - (y-1)^2$.

*Oppgave 5 fortsetter på s*

**c)** Bruk Stokes' teorem til å finne verdien av linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

når $\mathbf{F}$ er gitt som i **b)**, og $C$ er skjæringskurven mellom flatene $A$ og $B$ i **b)**, orientert mot urviseren sett ovenfra.

## SIF5005/07 Matematikk 2/2A 17.8.98

### Fasit

**Oppgave 1** **a)** sadelpunkt i $(0,0)$, lokalt maksimum i $(1/2, 1/3)$

**b)** $(1,1)$ og $(-1,-1)$; $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ og $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

**Oppgave 2** **a)** $\cos(xy + z^2 - 4x + 4y)\big[(y-4)\mathbf{i} + (x+4)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\big]$; $4$; $4\sqrt{2}$

**b)** $1$

**Oppgave 3** $(1 - \ln 2)^2$

**Oppgave 4** **b)** $16/35$; $16\pi/35$

**Oppgave 5** **a)** $x^2 + y^2 \leq 4$; $8\pi$

**b)** $16\pi$; $0$; $16\pi$

**c)** $16\pi$