**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal (735) 93468
Trond Digernes (735) 93517

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

Onsdag 4. august 1999
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
- Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Et insekt beveger seg i xy-planet. Posisjonen til insektet ved et vilkårlig tidspunkt $t \in [0, \pi/2]$ er gitt ved koordinatene

$$x(t) = t + \sin t \cos t$$
$$y(t) = \sin^2 t\,.$$

a) Skissér banen til insektet over tidsintervallet $[0, \pi/2]$. Hvor langt beveger insektet seg i løpet av denne tiden?

b) Anta at temperaturen på et vilkårlig sted i xy-planet er gitt ved funksjonen

$$T(x, y) = x^2 + y^2\,.$$

Hvor stor temperaturendring pr. lengdeenhet langs banen opplever insektet ved tidspunktet $t = \pi/6$?

Oppgave 2 Området D ligger i 1. kvadrant og er begrenset av hyperblene $x^2 - y^2 = 1$ og $x^2 - y^2 = 2$ og sirklene $x^2 + y^2 = 3$ og $x^2 + y^2 = 4$. Finn verdien av integralet

$$\iint_D x^3 y^3\, dx dy$$

ved å foreta et passende variabelskifte under integraltegnet.

Oppgave 3 Den lukkede, positivt orienterte kurven C består av sirkelbuen $C_1: x^2+y^2$ … $y \geq 0$, og det rette linjestykket L: $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F} = \langle -y^2/2, x^2/2 \rangle\,.$$

a) Finn verdien av kurveintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds\,.$$

b) Beregn den utadrettede fluksen til $\mathbf{F}$ gjennom hvert av kurvestykkene C_1 og L – … si, finn verdien av integralene

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds \quad \text{og} \quad \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

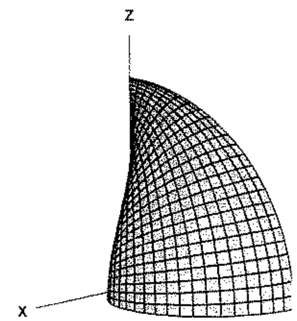
der normalvektorene $\mathbf{n}$ peker ut av området avgrenset av C .

Oppgave 4

Et legeme T har følgende beskrivelse i kulekoordinater:

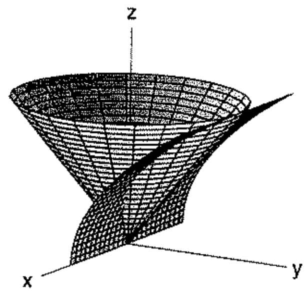
$$0 \leq \rho \leq \sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

(se figur). Finn massen til T når når tettheten δ er gitt ved $\delta = \cos\theta$ i kulekoordinater. Bestem også z-koordinaten til massesenteret (sentroiden) til T.



Oppgave 5

Legemet T er begrenset av kjegleflaten $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, og den parabolske sylinderen $z^2 = 2y$ (se figur). Skjæringskurven mellom de to flatene betegnes med C.



a) Vis at projeksjonen av C i xy-planet er en sirkel. Finn volumet til T.

b) Finn arealet av den delen av overflaten til T som ligger på kjegleflaten.

c) Finn de punktene på C som ligger nærmest punktet $(0,0,2)$.

d) Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F} = \langle -y, e^{z^2}, xz \rangle .$$

Bestem curl($\mathbf{F}$). Finn verdien av kurveintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

når C er orientert mot urviseren sett ovenfra.

SIF5005 Matematikk 2 4.8.99

Fasit

Oppgave 1	**a)**	2
	b)	$(\pi/6)\sqrt{3} + 1$
Oppgave 2		$\frac{5}{16}$
Oppgave 3	**a)**	$\frac{2}{3}$
	b)	$-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$
Oppgave 4		$\frac{1}{12}$; $\frac{3}{10}$
Oppgave 5	**a)**	$x^2 + (y-1)^2 = 1$; $\frac{32}{45}$
	b)	$\pi\sqrt{2}$
	c)	$(\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$ og $(-\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$
	d)	$\langle -2ze^{z^2}, -z, 1 \rangle$; 2π