Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68

EKSAMEN I FAG SIF5005/07 MATEMATIKK 2/2A

Mandag 17. august 1998
Tid: 0900–1400

Hjelpemidler: Typegodkjent kalkulator med tomt minne,
Rottmann: *Matematisk formelsamling.*

Oppgave 1

a) Finn, og klassifiser, de kritiske punktene for funksjonen

$$f(x,y) = xye^{-2x-3y}.$$

b) Kurven

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

er en ellipse med sentrum i origo og akser som ikke er parallelle med koordinataksene. Finn punktene på ellipsen som ligger nærmest origo og lengst vekk fra origo.

Oppgave 2
Gitt funksjonen

$$f(x,y,z) = \sin(xy + z^2 - 4x + 4y).$$

a) Finn gradienten $\nabla f(x,y,z)$. Regn ut den retningsderiverte til f i origo i retning av vektoren $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Hva er den største retningsderiverte til f i origo?

b) La C betegne linjestykket fra origo til $(1, \pi/2, 2)$. Finn verdien av linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \cos(xy + z^2 - 4x + 4y)\big[(y-4)\mathbf{i} + (x+4)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\big].$$

Oppgave 3
Løs integralet

$$\int_2^e \int_{\ln x}^1 \frac{2xy}{e^y + 2}\, dy\, dx$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

Oppgave 4

a) La R være et område i xy-planet, begrenset av en enkel lukket kurve C. Bruk teorem til å vise at koordinatene til arealsenteret (sentroiden) til R er gitt v

$$\overline{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\, dy, \qquad \overline{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\, dx$$

der A er arealet av R og C gjennomløpes mot urviseren.

b) Skisser den lukkede kurven C med parameterfremstilling

$$x = t^2, \quad y = t^3 - t, \quad -1 \le t \le 1.$$

Beregn integralet $\oint_C x^2\, dy$ og finn, for eksempel ved hjelp av Pappus' første volumet av rotasjonslegemet som dannes når området begrenset av C dreie aksen.

Oppgave 5
Et legeme T er begrenset av paraboloiden $z = 9 - x^2 - (y-1)^2$ og planet $z = 2y$

a) Vis at projeksjonen av T i xy-planet er en sirkeldisk med senter i origo. Finn av T.

b) La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x - yz)\mathbf{i}$, og la S være overflat Hva blir flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

når $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen til S som peker ut av T?

Bestem også

$$\iint_A \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \quad \text{og} \quad \iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

der A er den delen av S som ligger i planet $z = 2y + 4$, og B er den delen a ligger på paraboloiden $z = 9 - x^2 - (y-1)^2$.

Oppgave 5 fortsetter p

c) Bruk Stokes' teorem til å finne verdien av linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

når $\mathbf{F}$ er gitt som i **b**), og C er skjæringskurven mellom flatene A og B i **b**), orientert mot urviseren sett ovenfra.

SIF5005/07 Matematikk 2/2A 17.8.98

Fasit

Oppgave 1 **a)** sadelpunkt i $(0,0)$, lokalt maksimum i $(1/2, 1/3)$

b) $(1,1)$ og $(-1,-1)$; $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ og $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

Oppgave 2 **a)** $\cos(xy+z^2-4x+4y)\left[(y-4)\mathbf{i}+(x+4)\mathbf{j}+2z\mathbf{k}\right]$; 4; $4\sqrt{2}$

b) 1

Oppgave 3 $(1-\ln 2)^2$

Oppgave 4 **b)** $16/35$; $16\pi/35$

Oppgave 5 **a)** $x^2+y^2 \le 4$; 8π

b) 16π; 0; 16π

c) 16π