



EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

Onsdag 4. august 1999
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
- Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Et insekt beveger seg i xy -planet. Posisjonen til insektet ved et vilkårlig tidspunkt $t \in [0, \pi/2]$ er gitt ved koordinatene

$$\begin{aligned} x(t) &= t + \sin t \cos t \\ y(t) &= \sin^2 t. \end{aligned}$$

a) Skissér banen til insektet over tidsintervallet $[0, \pi/2]$. Hvor langt beveger insektet seg i løpet av denne tiden?

b) Anta at temperaturen på et vilkårlig sted i xy -planet er gitt ved funksjonen

$$T(x, y) = x^2 + y^2.$$

Hvor stor temperaturendring pr. lengdeenhet langs banen opplever insektet ved tidspunktet $t = \pi/6$?

Oppgave 2 Området D ligger i 1. kvadrant og er begrenset av hyperblene $x^2 - y^2 = 1$ og $x^2 - y^2 = 2$ og sirklene $x^2 + y^2 = 3$ og $x^2 + y^2 = 4$. Finn verdien av integralet

$$\iint_D x^3 y^3 dx dy$$

ved å foreta et passende variabelskifte under integraltegnet.

Oppgave 3 Den lukkede, positivt orienterte kurven C består av sirkelbuen $C_1: x^2 + y^2 \geq 0$, og det rette linjestykket $L: y = 0, -1 \leq x \leq 1$. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F} = \langle -y^2/2, x^2/2 \rangle.$$

a) Finn verdien av kurveintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.$$

b) Beregn den utadrettede fluksen til $\mathbf{F}$ gjennom hvert av kurvestykkene C_1 og $L - C_1$ si, finn verdien av integralene

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \quad \text{og} \quad \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

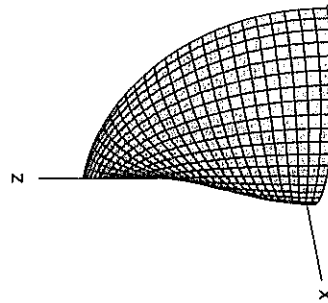
der normalvektorene $\mathbf{n}$ peker ut av området avgrenset av C .

Oppgave 4

Et legeme T har følgende beskrivelse i kulekoordinater:

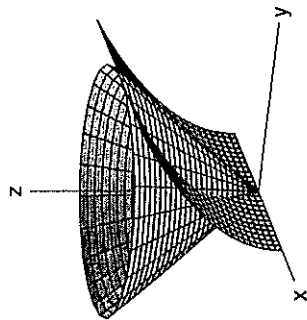
$$0 \leq \rho \leq \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

(se figur). Finn massen til T når tettheten δ er gitt ved $\delta = \cos \theta$ i kulekoordinater. Bestem også z -koordinaten til massesenteret (sentroiden) til T .



Oppgave 5

Legemet T er begrenset av kjegleflaten $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, og den paraboliske sylindren $z^2 = 2y$ (se figur). Skjæringskurven mellom de to flatene betegnes med C .



- Vis at projeksjonen av C i xy -planet er en sirkel. Finn volumet til T .
- Finn arealet av den delen av overflaten til T som ligger på kjegleflaten.
- Finn de punktene på C som ligger nærmest punktet $(0, 0, 2)$.
- Et vektorfelt F er gitt ved

$$F = \langle -y, e^{z^2}, xz \rangle.$$

Bestem $\text{curl}(F)$. Finn verdien av kurveintegralet

$$\oint_C F \cdot T \, ds$$

når C er orientert mot urviseren sett ovenfra.

Fasit

- | | | |
|-----------|----|---|
| Oppgave 1 | a) | 2 |
| | b) | $(\pi/6)\sqrt{3} + 1$ |
| Oppgave 2 | | $\frac{5}{16}$ |
| Oppgave 3 | a) | $\frac{2}{3}$ |
| | b) | $-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}$ |
| Oppgave 4 | | $\frac{1}{12}; \frac{3}{10}$ |
| Oppgave 5 | a) | $x^2 + (y-1)^2 = 1; \frac{32}{45}$ |
| | b) | $\pi\sqrt{2}$ |
| | c) | $(\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$ og $(-\sqrt{3}/2, 1/2, 1)$ |
| | d) | $\langle -2ze^{z^2}, -z, 1 \rangle; 2\pi$ |