Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Nynorsk
14. August 2006
kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Typegodkjent kalkulator med tomt minne (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal grunngjevast, og det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.

Oppgåve 1 La $f(t)$ vere ein vilkårleg deriverbar funksjon, og la

$$g(x,y) = f\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \quad \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Vis at då gjeld

$$x\,g_x + y\,g_y = 0.$$

Oppgåve 2 Gitt ein funksjon $f(x,y) = (x^2y - 2x^2 - y + 2)e^{-y}$.

a) Finn alle dei kritiske punkta til f. Bruk andrederiverttesten til å klassifisere eitt av dei kritiske punkta.

b) La området R vere gitt ved ulikskapane $y \geq 0$ og $-1 \leq x \leq 1$. Forklar kvifor f har absolutt maksimum og minimum (globalt maksimum og minimum) på R og bestem desse.

Oppgåve 3 La R vere det plane området avgrensa av kurvene $x = y^2$ og $x + y = 2$.

a) Rekn ut arealet av R som itererte dobbeltintegral på to ulike måtar.

b) La C angi randa til R med positiv omløpsretning, og la

$$\mathbf{F}(x, y) = (7y - 1001e^{x^2})\,\mathbf{i} + ((y^2 - 2)\ln y + 5x)\,\mathbf{j}.$$

Finn verdien til linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds.$$

Oppgåve 4 La T vere det romlege området gitt i sylinderkoordinatar ved

$$0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le z \le 2,$$

og la S vere overflata til T. La vidare

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^3)\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z - y^3)\,\mathbf{k}.$$

a) Finn fluksen $\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS$ ut gjennom den krumme delen S' av flata S.

b) Finn fluksen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$ ut gjennom S.

Oppgåve 5 Finn $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$ når

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og C er den orienterte kurva parametrisert ved

$$x = \cos t - 1, \quad y = \cos^3 t + t, \quad z = \tan t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$$

Oppgåve 6 La C_n vere den plane kurva

$$r = \cos n\theta$$

gitt i polarkoordinatar. Skisser C_n for $n = 3$ og $n = 4$.

Finn arealet av området innanfor kurva C_n for alle positive heiltal n.

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i andrederiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ B = f_{xy},\ C = f_{yy}$$

Koordinatsystem:

Sylinderkoordinatar $(r,\, \theta,\, z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinatar $(\rho,\, \varphi,\, \theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi \quad \cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Spesialtilfelle 1: $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlege lekamar:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$