Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48
Hans Christian Karlsen tlf. 73 59 20 21
Martin G. Gulbrandsen tlf. 73 59 35 36

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
Onsdag 24. mai 2006
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Typegodkjent kalkulator med tomt minne (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 15. juni 2006

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at framgangsmåten framgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 En sirkulær sylinder har radius målt til $r = 4\,\text{cm}$ og høyde målt til $h = 10\,\text{cm}$, med en mulig feil på opptil 1 mm i hver måling. Bruk differensialer til å estimere den maksimale feilen (med benevning) du kan få når du beregner volumet til sylinderen.

Oppgave 2 En romkurve C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1.$$

a) Vis at $|\mathbf{r}'(t)| = 1 + t^2$. Bestem enhetstangenten $\mathbf{T}(t)$ og enhetsnormalen (prinsipalnormalen) $\mathbf{N}(t)$.

b) Finn akselerasjonsvektoren til C i origo, og dekomponer denne i en tangentialkomponent og en normalkomponent. Finn videre krumningen i dette punktet.

Oppgave 3 Betrakt funksjonen

$$f(x,y) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + y^2$$

definert på disken D gitt ved $x^2 + y^2 \leq 4$.

a) Finn de kritiske punktene til f i det indre av disken, det vil si området $x^2+y^2 < 4$. Bruk Lagranges metode til å finne maksima og minima for f langs randkurven til D, det vil si under bibetingelsen $x^2 + y^2 = 4$.

b) Lag en figur der du tegner inn randkurven til D sammen med noen nivåkurver for f, og markerer alle punktene du fant i (a). Hva er f sitt globale (absolutte) maksimum og globale minimum på hele disken D?

Oppgave 4 La T være området som både ligger innenfor sfæren (kuleflaten) $x^2+y^2+z^2 = 4$ og på oversiden av paraboloiden $3z = x^2 + y^2$.

a) Finn volumet av T.

b) La S være toppflaten til T, det vil si den delen av sfæren som ligger på oversiden av paraboloiden. La

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Regn ut $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ når $\mathbf{n}$ er oppoverrettet enhetsnormal til S.

Oppgave 5 La $\mathbf{F}$ være et vektorfelt slik at

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \langle f(y,z), 2yz, g(y,z)\rangle$$

og

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \langle h(y,z), 2yz, -z^2\rangle,$$

der f, g og h er (ukjente) kontinuerlig deriverbare funksjoner av y og z.

a) Bestem $f(y,z)$ når $f(0,0) = 1$.

La S være den delen av paraboloiden $z = 4 - x^2 - 4y^2$ som ligger over planet $z = 3$.

b) Finn

$$\iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

når $\mathbf{n}$ er oppoverrettet enhetsnormal til S.

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\,\theta,\,z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater $(\rho,\,\varphi,\,\theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Spesialtilfelle: $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$