Løsningsforslag for eksamen i TMA4105, mai 2006

Oppgave 1

Har gitt fra oppgaven at $r = 4$ cm, $h = 10$ cm, og $dr = dh = 0.1$ cm. Volumet er $V(r,h) = \pi r^2 h = 160\pi\,\mathrm{cm}^3$. Finner differensialet

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh \\ &= 2\pi r h dr + \pi r^2 dh \\ &= 9.6\pi\,\mathrm{cm}^3 \\ &\approx 30.16\,\mathrm{cm}^3. \end{aligned}$$

Maksimal feil blir da $30\,\mathrm{cm}^3$.

Oppgave 2

Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \langle t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, \frac{1}{3}t^3\rangle, \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \langle 1, \sqrt{2}t, t^2\rangle, \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \langle 0, \sqrt{2}, 2t\rangle, \end{aligned}$$

hvor $\dot{r}$ betyr den deriverte av r med hensyn på tiden.

(a) Har da

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2}t)^2 + (t^2)^2} = 1 + t^2. \tag{1}$$

Vi finner enhetstangentsialvektoren

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \frac{1}{1+t^2}\langle 1, \sqrt{2}t, t^2\rangle.$$

Har

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}(t) &= \frac{1}{1+t^2}\langle 0, \sqrt{2}, 2t\rangle - \frac{2t}{(1+t^2)^2}\langle 1, \sqrt{2}t, t^2\rangle \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}\langle -\sqrt{2}t, 1-t^2, \sqrt{2}t\rangle, \\ \left|\dot{\mathbf{T}}(t)\right| &= \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Da har vi

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{|\dot{\mathbf{T}}(t)|} = \frac{1}{1+t^2}\langle -\sqrt{2}t, 1-t^2, \sqrt{2}t\rangle.$$

(b) Har

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}(0) &= \langle 0, \sqrt{2}, 0\rangle,\\ \mathbf{T}(0) &= \langle 1, 0, 0\rangle,\\ \mathbf{N}(0) &= \langle 0, 1, 0\rangle,\end{aligned}$$

slik at $\ddot{\mathbf{r}}(0) = 0 \cdot \mathbf{T}(0) + \sqrt{2} \cdot \mathbf{N}(0)$.
Vi vet også fra likning (1) at $v(0) = 1$, og siden $\sqrt{2} = \kappa(0)v(0)^2$, får vi $\kappa(0) = \sqrt{2}$.

Oppgave 3

(a) De partielle deriverte til f eksisterer over alt, så vi finner de kritiske punktene ved å løse

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Nå er $\partial f/\partial x = 1/2(x-1)$ og $\partial f/\partial y = 2y$, så det eneste kritiske punktet er

$$(x, y) = (1, 0).$$

La $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, slik at bibetingelsen kan skrives $g(x, y) = 0$. Vi finner gradientene til f og g:

$$\nabla f = [\frac{1}{2}(x-1), 2y] \qquad\qquad \nabla g = [2x, 2y]$$

Siden $\nabla g \neq 0$ over alt hvor bibetingelsen $g(x, y) = 0$ er oppfylt, kan vi bruke Lagranges metode, så vi skal løse ligningssystemet

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad\qquad g(x, y) = 0$$

som skrevet ut blir

$$\frac{1}{2}(x-1) = 2\lambda x$$
$$2y = 2\lambda y$$
$$x^2 + y^2 = 4.$$

Om vi multipliserer den første ligningen med y og den andre med x ser vi at

$$xy - y = 4xy$$

som gir enten $y = 0$ eller $x = -1/3$. Hvis $y = 0$ gir bibetingelsen at $x = \pm 2$, og hvis $x = -1/3$ gir bibetingelsen $y = \pm\sqrt{35}/3$. Vi har derfor fire kandidater

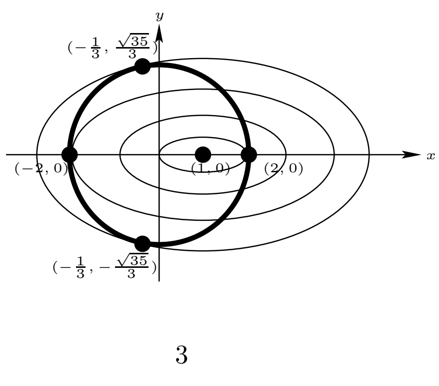
$$(2,0), \quad (-2,0), \quad (-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{35}}{3}), \quad (-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{35}}{3})$$

for maksima eller minima. Ved innsetting finner vi

$$f(2,0) = \frac{1}{4}$$
$$f(-2,0) = \frac{9}{4}$$
$$f(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{35}}{3}) = \frac{13}{3}$$

Vi konkluderer med at f oppnår sin maksimalverdi $13/3$ i de to punktene $(-1/3, \pm\sqrt{35}/3)$ og at f oppnår sin minimalverdi $1/4$ i punktet $(2,0)$.

(b) I figuren nedenfor er randkurven $g(x,y) = 0$ til området D markert med tykk strek, mens de tynne ellipsene er nivåkurver for f. Merk at nivåkurvene til f tangerer kurven $g(x,y) = 0$ i de fire punktene på randa.



Siden absolutt maksimum og absolutt minimum må være et av de fem punktene vi har funnet i del (a), ser vi ved innsetting at f oppnår sin maksimalverdi 39/4 i de to punktene $(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{35}}{3})$ (på randa til D) og f oppnår sin minimalverdi 0 i punktet $(1, 0)$ (i det indre av D).

Oppgave 4

(a) I sylinderkoordinater (r, θ, z) er de to flatene gitt ved $r^2+z^2 = 4$ og $3z = r^2$, så T er området

$$
\begin{aligned}
0 \leq \theta &\leq 2\pi \\
0 \leq r &\leq \sqrt{3} \\
r^2/3 \leq z &\leq \sqrt{4 - r^2}.
\end{aligned}
$$

Volumet kan finnes ved integrasjon:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_T dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} r \; dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(r\sqrt{4 - r^2} - r^3/3 \right) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{3/2} - \frac{1}{12} r^4 \right]_0^{\sqrt{3}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{19}{12} \; d\theta \\
&= \frac{19\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

(b) I et punkt (x, y, z) på sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ er $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ en ytre normalvektor av lengde 2. Derfor er

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \; dS \\
&= \frac{1}{2} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \; dS \\
&= 2 \iint_S dS.
\end{aligned}
$$

For å beregne dette integralet kan vi bruke parametriseringen $\mathbf{r}(u,v) = (x,y,z)$ der

$$
\begin{aligned}
x &= 2\sin u \cos v \\
y &= 2\sin u \sin v \\
z &= 2\cos u
\end{aligned}
$$

for $0 \le u \le \pi/3$ og $0 \le v \le 2\pi$. Da er (etter en utregning)

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = 4|\sin u|$$

og for u mellom 0 og $\pi/3$ er $\sin u \ge 0$, så vi kan droppe absoluttverditegnet. Dermed er

$$
\begin{aligned}
\iint_S dS &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \sin u \; du \; dv \\
&= 4\int_0^{2\pi} [-\cos u]_0^{\pi/3} \, dv \\
&= 8\pi(-1/2+1) \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

Til sammen får vi

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = 8\pi.$$

Oppgave 5

(a) Skriver $\mathbf{F} = \langle f, 2yz, g\rangle$. Tar curlen av vektorfeltet, og får

$$\left\langle h(y,z), 2yz, -z^2 \right\rangle = \nabla \times \mathbf{F} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial y} - 2y, \frac{\partial f}{\partial z}, -\frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle.$$

Har da 2 likninger som må være oppfylt samtidig,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2yz \qquad -\frac{\partial f}{\partial y} = -z^2.$$

Vi finner den generelle løsningen, $f(y,z) = yz^2 + C$, og med initialbetingelsen $f(0,0) = 1$, finner vi løsningen $f(y,z) = yz^2 + 1$.

(b) Bruker Stokes teorem,

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds,$$

der C er kurven med likning

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

som kan parametriseres

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \cos t, \frac{1}{2}\sin t, 3 \right\rangle, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Vi har da

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{9}{2}\sin t + 1, 3\sin t, g(y,z) \right\rangle \cdot \left\langle -\sin t, \frac{1}{2}\cos t, 0 \right\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{9}{2}\sin^2 t - \sin t + \frac{3}{2}\cos t \sin t \right)\, dt \\ &= -\frac{9}{2}\pi. \end{aligned}$$