TMA4105 Matematikk 2

Eksamensdag 14 august 2006

Oppgave 1 La $u = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Da er ved bruk av kjerneregelen

$$g_x(x,y) = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = f'(u) \cdot \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$g_y(x,y) = f'(u) \cdot \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Derved er $xg_x + yg_y = 0$.

Oppgave 2a De kritiske punktene (x, y) for f er løsningene av ligningssystemet

$$\begin{aligned} &(1) \quad f_x(x,y) = (2xy - 4x)e^{-y} = 0 \\ &(2) \quad f_y(x,y) = (x^2 - 1)e^{-y} - (x^2y - 2x^2 - y + 2)e^{-y} = 0 \end{aligned}$$

Siden $e^{-y} \neq 0$ for all y, kan vi dividere ligningene med e^{-y}:

$$\begin{aligned} &(1) \quad 2xy - 4x = 0 \\ &(2) \quad x^2 - 1 - x^2y + 2x^2 + y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Av (1) følger det at $x = 0$ eller $y = 2$. Vi sjekker tilfellet $x = 0$ først. Innsatt i (2) gir det:

$$(2) \quad -1 + y - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \quad y = 3.$$

Punktet $(0, 3)$ er derfor et kritisk punkt. Vi sjekker så tilfellet $y = 2$. Innsatt i (2) gir det:

$$(2) \quad x^2 - 1 - 2x^2 + 2x^2 + 2 - 2 = x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Punktene $(1, 2)$ og $(-1, 2)$ er derfor også kritiske, og det finnes ikke flere kritiske punkter enn disse tre.
For klassifisering av et kritisk punkt ved andrederiverttesten, trenger vi

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (2y - 4)e^{-y} \\ f_{yy}(x,y) &= -(x^2-1)e^{-y} - (x^2-1)e^{-y} + (x^2y - 2x^2 - y + 2)e^{-y} \\ f_{xy}(x,y) &= 2xe^{-y} - (2xy - 4x)e^{-y} \end{aligned}$$

Vi sjekker for eksempel det kritiske punktet $(1, 2)$. Siden

$$f_{xx}(1,2)f_{yy}(1,2) - f_{xy}(1,2)^2 = -f_{xy}(1,2)^2 < 0$$

er dette et sadelpunkt.

Oppgave 2b En kontinuerlig funksjon oppnår alltid sitt maksimum og minimum på et lukket område. Og $f(x, y)$ er en kontinuerlig funksjon for alle x og y, og da spesielt på området $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 100$.
Vi har funnet de kritiske punktene $(0, 3)$, $(1, 2)$ og $(-1, 2)$ som alle ligger i R. Der er funksjonsverdiene

$$f(0,3) = -e^{-3}, \quad f(1,2) = 0, \quad f(-1,2) = 0.$$

Siden $f(x, y) \to 0$ når $y \to \infty$, oppnår $f(x, y)$ både maksimum og minimum i R.
Det gjenstår å sjekke randen. Langs y-aksen er $f(x, 0) = -2x^2 + 2$ med maksimum i $x = 0$ og minimum i $(\pm 1, 0)$ med $f(0, 0) = 2$ og $f(\pm 1, 0) = 0$. Langs de to linjene $x = 1$ og $x = -1$ er $f(\pm 1, y) = 0$.
Konklusjon: Absolutt maksimum 2 ligger i $(0, 0)$ og absolutt minimum $-e^{-3}$ ligger i $(0, 3)$.

Oppgave 3a Skjæringspunktene mellom de to kurvene:

$$y^2 + y - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -2 \text{ og } y = 1$$

$y = 1$ gir $x = 1$, og $y = -2$ gir $x = 4$, slik at skjæringspunktene er $(1, 1)$ og $(4, -2)$.
Vi velger først å ha indre integrasjon med hensyn på x (telle rutene linjevis):

$$A = \int_{y=-2}^{1} \int_{x=y^2}^{2-y} dx\, dy = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2) dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Dernest velger vi indre integrasjon med hensyn på y (telle rutene kolonnevis). Da må vi dele området i to med den vertikale linjen $x = 1$:

$$A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\, dx + \int_{x=1}^{4} \int_{y=-\sqrt{x}}^{2-x} dy\, dx = \int_{0}^{1} 2\sqrt{x}\, dx + \int_{1}^{4} (2 - x + \sqrt{x}) dx$$
$$= \left[4\,\frac{x^{3/2}}{3} \right]_{0}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_{1}^{4} = \frac{9}{2}.$$

Oppgave 3b Ved Green's teorem gjelder

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

der P og Q er komponentene til $\mathbf{F}$. Siden

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 5 - 7 = -2,$$

så er $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = -2\cdot(\text{arealet til } R) = -9$.

Oppgave 4a S' er en del av sylinderflaten $r = 1$, det vil si $x^2 + y^2 = 1$. Enhetsnormalen er derfor $\mathbf{n} = [x, y, 0]$. Derfor er

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = [x + y^3,\ y,\ z - y^2]\cdot[x, y, 0] = x^2 + xy^3 + y^2 = 1 + xy^3.$$

På grunn av symmetrien om yz-planet, er derved

$$\begin{aligned}\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iint_{S'} (1 + xy^3)dS = \iint_{S'} dS + 0 \\ &= \text{arealet av } S' = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1\cdot 2 = 2\pi\,.\end{aligned}$$

Oppgave 4b Ved divergensteoremet er $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \mathit{div}\,\mathbf{F}\,dV$ der $\mathit{div}\,\mathbf{F} = 3$. Det vil si,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 3\cdot(\text{volumet av den sylinderen}) = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 2 = 3\pi.$$

ALTERNATIVE LØSNINGER AV OPPGAVE 4a:

1. Løs først oppgave 4b.

$$\iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - \iint_{\text{bunn}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - \iint_{\text{bakvegg}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - \iint_{\text{lokk}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Fluks ut av bunnen D i planet $z = 0$:

$$\begin{aligned}\iint_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iint_D \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})dA = -\iint_D (z - y^3)dA \\ &= \iint_D y^3\,dA = \int_0^\pi \int_0^1 r^3\sin^3\theta\cdot r\,dr\,d\theta = \frac{4}{15}\end{aligned}$$

Fluks ut av lokket L i planet $z = 2$:

$$\iint_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA = \iint_D (2 - y^3) dA = \iint_D y^3\, dA = \pi - \frac{4}{15}.$$

Fluks ut av bakveggen E i planet $y = 0$:

$$\iint_E \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_E \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j})\, dA = -\int_{z=0}^{2} \int_{x=0}^{2} 0\, dA = 0.$$

Derved er fluksen ut av S' lik $3\pi - \pi + 4/15 - 4/15 = 2\pi$.

2. Parametrisering av S':

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = z \quad \text{for } 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le z \le 2.$$

Videre er

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta.$$

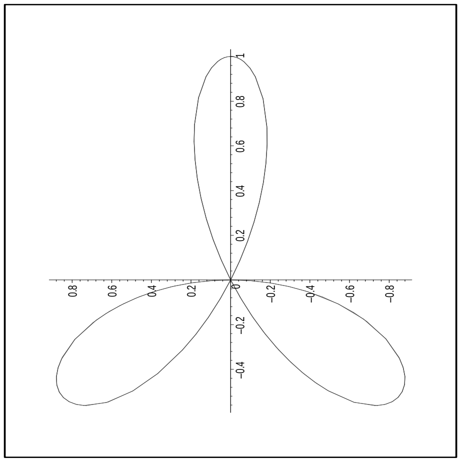
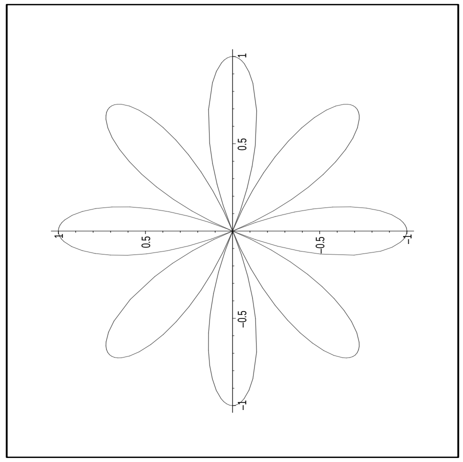
$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = (x + y^3)\cos\theta + y\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^3\theta\, \cos\theta + \sin^2\theta = 1 + \sin^3\theta\, \cos\theta.$

$$\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{z=0}^{2} (1 + \sin^3\theta\, \cos\theta) dz\, d\theta = 2\left[\theta + \frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi} = 2\pi.$$

Oppgave 5 $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt med potensialfunksjon $f(xy, z) = xy + z$.
C er en glatt kurve som starter i $\mathbf{r}(0) = (0, 1, 0)$ og ender i $\mathbf{r}(\pi/4) = (\sqrt{2}/2 - 1,\ \sqrt{2}/4 + \pi/4,\ 1)$. Derfor er

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= f(\sqrt{2}/2 - 1,\ \sqrt{2}/4 + \pi/4,\ 1) - f(0, 1, 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - 0 = \frac{5 - \sqrt{2}}{4} - \frac{2 - \sqrt{2}}{8}\,\pi\,. \end{aligned}$$

Oppgave 6 Skisse av C_3 og C_4 (rotert en vinkel $\pi/2$):

Når n er et odde tall, gjennomløpes figuren to ganger når θ går fra 0 til 2π. Derfor er arealet

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos^2 n\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin 2n\theta}{2n}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

når n er et odde tall. Når n er et like tall, gjennomløpes figuren bare en gang når θ går fra 0 til 2π. Derfor er arealet

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos^2 n\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

når n er et like tall. (Legg merke til den overraskende egenskapen at A bare avhenger av om n er odde eller like, mens størrelsen ellers ikke har noe å si!)