Eksempel på trippeltintegral

La T være området i rommet bestemet av ulikhetene $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$. Regn ut

$$I = \iiint_T x\ dV.$$

Løsning 1. Først er det lurt å skissere området. Vi ser at bunnen på området er en paraboloide, og ulikhetene $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \leq 2$ skjærer ut et begrenset område.

Toppen av området er en del av planet $z = 2$, og består av en fjerdedels disk med radius $\sqrt{2}$, bestemt av ulikhetene $x \leq 0$, $y \leq 2$ og $x^2 + y^2 \leq 2$.

De to sidene av området ser like ut - begge er like området under grafen $y = \sqrt{x}$ der x går fra 0 til 2. Mer presist: Området skjærer xz-planet $y = 0$ i området mellom z-aksen og grafen $x = \sqrt{z}$ med z-verdier fra 0 til 2. Tilsvarende er skjæringa med planet $x = 0$ lik området mellom z-aksen og grafen $y = \sqrt{z}$ med z-verdier fra 0 til 2.

Vi vil evaluere trippel-integralet ved itererte integraler. Da må vi skrive området T på en egnet form. Hvis vi velger å skrive dx ytterst må vi finne ut hvilke x-verdier området tillater. Vi ser at $x = 0$ er den minste mulige verdien for x, og at denne er mulig i origo. Videre ser vi at $x = \sqrt{2}$ er den største veriden for x, så vi skriver ned

$$0 \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Nå skal vi finne likninger for y for en gitt x-verdi. Vi tenker altså på x som konstant (eller valgt). Vi ser at $y = 0$ er mulig for alle x-verdier. Den største verdien som er mulig (fortsatt for en gitt verdi av x mellom 0 og $\sqrt{2}$) er $\sqrt{2 - x^2}$, og skriver ned

$$0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}.$$

Merk at vi nå har beskrevet R, projeksjonen av T til xy-planet. Området R består av alle par (x, y) slik at det finnes en z der (x, y, z) er i T. Nå gjenstår det bare å skrive ned hvilke z-verdier som er mulig for et slikt vilkårlig par i R. Det er lett, for det fikk vi oppgitt i oppgaven,

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 2.$$

Vi kan nå regne ut integralet ved et itererte integraler:

$$I = \iiint_T x\ dV = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} x\ dz\ dy\ dx$$

Siden $\int x\ dz = xz + C$ får vi videre

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2 - x^2 - y^2)\ dy\ dx$$

Nå har vi redusert oss til et dobbeltintegral over R. Videre integrasjon gir

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\sqrt{2}} \left[x(2y - x^2 y - \frac{1}{3}y^3) \right]_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} x \left(2\sqrt{2-x^2} - x^2\sqrt{2-x^2} - \frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2} \right) \, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{3}(2-x^2)^{3/2} \, dx \\
&= \left[-\frac{2}{15}(2-x^2)^{5/2} \right]_{x=0}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}
$$

Løsning 2. Vi kan velge å heller integrere med hensyn på z sist. Da ser vi at mulige z-verdier er bestemt av $0 \leq z \leq 2$. For en vilkårlig z-verdi er y-verdier mellom 0 og $\sqrt{z}$ mulige, og for et gitt par (y, z) er x-verdier som tilfredsstiller ulikhetene $0 \leq x \leq \sqrt{z - y^2}$ mulige. Ved hjelp av denne beskrivelsen av T kan vi regne ut integralet ved itererte integraler:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_T x \, dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z-y^2}} x \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{x=0}^{\sqrt{z-y^2}} \, dy \, dz \\
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{2}(z - y^2) \, dy \, dz = \int_0^2 \left[\frac{yz}{2} - \frac{y^3}{6}) \right]_{y=0}^{\sqrt{z}} \, dy \, dz \\
&= \int_0^2 \left(\frac{z^{3/2}}{2} - \frac{z^{3/2}}{6} \right) \, dz = \int_0^2 \frac{1}{3} z^{3/2} \, dz = \left[\frac{2}{15} z^{5/2} \right]_{z=0}^{2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}
$$