Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48
Espen R. Jakobsen tlf. 73 59 35 12
Magnus B. Landstad tlf. 73 59 17 53

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Nynorsk
Onsdag 8. August 2007
kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 29.08.2007

Alle svar skal grunngjevast, og det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.

Oppgåve 1 Finn punktet på planet

$$x + y - 3z = 22$$

som ligg nærast origo.

Oppgåve 2 Avgjer kva for ei av dei fire parametriseringane i u og v nedanfor som er ei parametrisering av tangentplanet til flata

$$x^2 + y^2 = 2\sin z$$

i punktet $(1, 1, \pi/2)$. (Husk å grunngje svaret.)

(A) $x = 2u, \quad y = 2v, \quad z = \frac{\pi}{2}$
(B) $x = 1 + u, \quad y = 1 - u, \quad z = v$
(C) $x = 2u, \quad y = 2v, \quad z = 0$
(D) $x = 2u, \quad y = 2u, \quad z = 2\cos v$

Oppgåve 3 La $a > 0$ vere ein gitt konstant. Rekn ut integralet

$$\int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx.$$

Oppgåve 4 Ei kurve C er gitt ved parametriseringa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = 3 \sin t \cos t\, \mathbf{i} + 3 \sin^2 t\, \mathbf{j} \quad \text{for } 0 \le t \le \pi.$$

Finn einingstangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ til C.

Finn den prinsipale einingsnormalvektoren $\mathbf{N}(t)$ til C.

Finn krumminga $\kappa(t)$ til C.

Rekn ut lengda av C.

Kva for kurve er C? (Husk at svaret skal grunngjevast).

Oppgåve 5 Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\mathbf{i} + y \sin z^2\, \mathbf{j} + xyz\, \mathbf{k}$$

og flatene

$$\begin{aligned} S_1&: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad z = (\sin \pi x)(\sin \pi y) \\ S_2&: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad z = 0. \end{aligned}$$

a) Rekn ut

$$\iint_{S_2} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS.$$

b) Rekn ut

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

der $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent

c) La T vere lekamen avgrensa av S_1 og S_2 med konstant massetettleik δ. Rekn ut tyngdepunktet til T.

Oppgåve 6 La $\mathbf{G}(x, y, z)$ vere eit vektorfelt i rommet gitt ved

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (7x - x^3)\mathbf{i} + (y - 4y^3)\mathbf{j} + (4z - 9z^3)\mathbf{k}.$$

Finn den avgrensa lekamen T slik at fluksen

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

ut gjennom overflata S til T er størst mogeleg.

Oppgåve 7

a) Flata S er gitt ved parametriseringa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (2 - \sin u) \cos v\, \mathbf{i} - \cos u\, \mathbf{j} + (2 - \sin u) \sin v\, \mathbf{k} \quad \text{for } \ u \in [0, 2\pi], \ \ v \in [0, \pi].$$

Arealet av S er $4\pi^2$ (dette skal du ikkje rekne ut).

Finn z-komponenten til sentroiden til S.

b) La C vere sirkelen i xy-planet med sentrum i $(2, 0)$ og radius 1. Ved å rotere C om y-aksen får ein ei torusflate S'.

Finn ei likning for flata S' i kartesiske koordinatar.

Vis at punktet $\mathbf{r}(u, v)$ (som definert i a)) ligg på S' for alle $u, v \in [0, 2\pi]$.

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i andrederiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystem:

Sylinderkoordinatar $(r,\,\theta,\,z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinatar $(\rho,\,\varphi,\,\theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi\quad\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Spesialtilfelle 1: $\quad dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlege lekamar:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$