Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:

Halvard Fausk	tlf. 73 59 35 23
Espen R. Jakobsen	tlf. 73 59 35 12
Pål Hermunn Johansen	tlf. 73 59 17 99
Magnus B. Landstad	tlf. 73 59 17 53

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Nynorsk
Dag 25. Mai 2007
kl. 9–13

Hjelpemiddel (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 18.06.2007

Alle svar skal grunngjevast, og det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.

Oppgåve 1 La f vere funksjonen gitt ved

$$f(x,y,z) = \sin\frac{x}{2} + e^{2yz}.$$

I kva for retning blir den retningsderiverte til f i punktet $(\pi, 0, 1)$ størst?

Rekn ut den retningsderiverte i denne retninga.

Oppgåve 2 La f vere funksjonen gitt ved

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

a) Finn eventuelle kritiske punkt for $f(x,y)$.

Finn absolutt maksimum og minimum for $f(x,y)$ på området gitt ved $x^2+y^2 \leq 9$.

b) For $r > 0$, la A_r vere området gitt ved $x^2 + y^2 \leq r^2$.

For kvar $r > 0$, finn maksimum og minimum for $f(x, y)$ på A_r.

Avgjer om $f(x, y)$ har absolutt maksimum og/eller absolutt minimum i $\mathbb{R}^2$, og bestem desse dersom dei finnest.

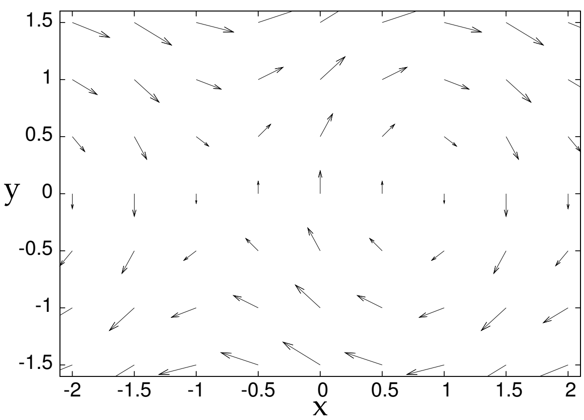
Oppgåve 3 Fire vektorfelt er plotta i figurane I, II, III og IV. Tre av desse svarer til tre av dei følgjande vektorfelta:

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{5}\,(y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j})$$
$$\mathbf{G}(x,y) = \frac{1}{5}\,\big(x\,\mathbf{i} + (y^2+1)\mathbf{j}\big)$$
$$\mathbf{H}(x,y) = \frac{2}{5}\left(\frac{2x}{x^2+y+4}\,\mathbf{i} + \frac{1}{x^2+y+4}\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{K}(x,y) = \frac{1}{5}\,(y\,\mathbf{i} + \cos 2x\,\mathbf{j})\,.$$

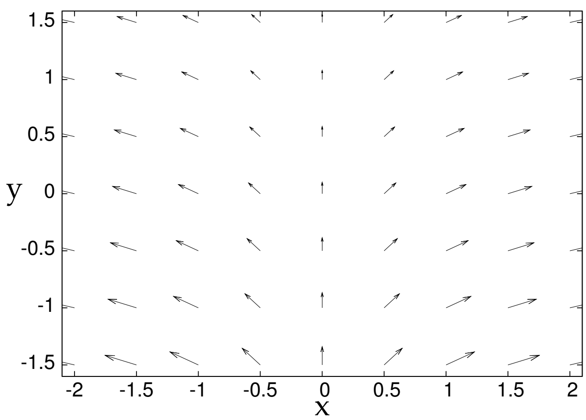
Kopiér tabellen

Vektorplott	Vektorfelt
I	
II	
III	
IV	

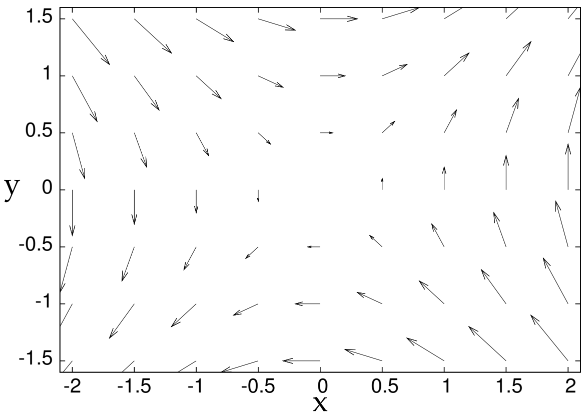
på svararket ditt, og fyll ut med **F**, **G**, **H** eller **K** for dei tilhøyrande vektorfelta.
Set eit kryss dersom vektorplottet ikkje er med. Svaret skal ikkje grungjevast.



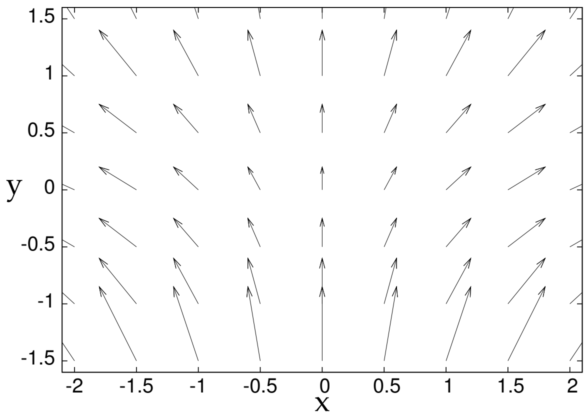
I



II



III



IV

Oppgåve 4 Flata

$$\rho = 2 + \cos\varphi$$

gitt i kulekoordinater (sfæriske koordinatar) avgrensar eit område T. Finn volumet av den delen av T som ligg over xy-planet.

Oppgåve 5 Rekn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

når

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i}\,\sin x + \mathbf{j}\sin(y^2)$$

og C er kurva parametrisert ved

$$C: \qquad x = t^2, \quad y = t^3 - t \qquad \text{for } 0 \le t \le 1.$$

Oppgåve 6 La T vere området som ligg innafor torusen $z^2 + (r-2)^2 = 1$ og over kjegla $z = r - 1$ (i sylinderkoordinatar).

a) Finn projeksjonen av T ned i xy-planet og rekn ut

$$\iiint_T z\, dV.$$

Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - y)\mathbf{i} + (yz + x)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}.$$

b) La S_1 vere den delen av overflata til T som ligg på kjegla. Finn fluksen til $\mathbf{F}$ opp gjennom S_1.

c) La S_2 vere den delen av overflata til T som ligg på torusen. Finn fluksen til $\mathbf{F}$ opp gjennom S_2.

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i andrederiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystem:

Sylinderkoordinatar $(r,\ \theta,\ z)$:

$$x = r\ \cos\theta, \quad y = r\ \sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinatar $(\rho,\ \varphi,\ \theta)$:

$$x = \rho\ \sin\varphi \quad \cos\theta, \quad y = \rho\ \sin\varphi\ \sin\theta, \quad z = \rho\ \cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Spesialtilfelle 1: $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlege lekamar:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$