LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2, 08.08.2007

Oppgave 1. Normalvektoren til planet er $\mathbf{N} = \langle 1, 1, -3\rangle$. Hvis vi dekomponerer vektoren $\mathbf{b} = \langle 22, 0, 0\rangle$ (som svarer til et punkt i planet) til summen av en vektor $\mathbf{b}_{\|}$ som er paralell med $\mathbf{N}$ og en vektor $\mathbf{b}_{\perp}$ som står normalt på $\mathbf{N}$, vil $\mathbf{b}_{\|}$ gi oss det nærmeste punktet.

$$\mathbf{b}_{\|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^2}\mathbf{N} = \frac{\langle 22,0,0\rangle\cdot\langle 1,1,-3\rangle}{1^2+1^2+3^2}\langle 1,1,-3\rangle = 2\langle 1,1,-3\rangle = \langle 2,2,-6\rangle$$

Punktet i planet som ligger nærmest origo er $\underline{(2, 2, -6)}$.

Oppgaven kan også løses ved å minimere funksjonen $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ under bibetingelsen $x + y - 3z = 22$.

Oppgave 2. Flaten kan skrives som $f(x, y, z) = 0$ der $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2\sin z$. Gradienten $\nabla f(x, y, z) = \langle 2x, 2y, -2\cos z\rangle$ er en normalvektor til tangentflata. I punktet $(1, 1, \pi/2)$ er gradienten lik $\langle 2, 2, 0\rangle$ og likninga til planet blir $\langle x - 1, y - 1, z - \pi/2\rangle \cdot \langle 2, 2, 0\rangle = 0$, eller ekvivalent, $x+y = 2$. Ved innsetting av parameteriseringene ser vi at det bare er (B) som passer. For de andre alternativene vil punktene som svarer til $u = v = 0$ ikke ligge i tangentplanet.

Oppgave 3. Området det integreres over er halvsirkelen $r \le a$, $0 \le \theta \le \pi$. Vi bytter til polare koordinater og får

$$\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^a e^{r^2} r\,dr\,d\theta = \pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^a = \underline{\frac{\pi}{2}(e^{a^2}-1)}.$$

Oppgave 4. Vi deriverer og får

$$\mathbf{r}'(t) = 3(\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathbf{i} + 3(2\cos t\sin t)\,\mathbf{j}.$$

For å få enhetstangenten må vi regne ut farta:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}'(t)| &= 3\sqrt{(\cos^2 t - \sin^2 t)^2 + (2\cos t\sin t)^2}\\
&= 3\sqrt{\cos^4 t - 2\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t + 4\cos^2 t\sin^2 t}\\
&= 3\sqrt{\cos^4 t + 2\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t}\\
&= 3\sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2} = 3.
\end{aligned}$$

Enhetstangenten blir da $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{3} = \underline{(\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathbf{i} + (2\cos t \sin t)}\,\mathbf{j}$.
(Dette er lik $\cos(2t)\mathbf{i} + \sin(2t)\mathbf{j}$.)

Den prinsipale normalvektoren er $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{2} = \underline{\mathbf{i}(-2\cos t \sin t) + \mathbf{j}(\cos^2 t - \sin^2 t)}$
etter tilsvarende utregninger. (Dette er lik $-\sin(2t)\mathbf{i} + \cos(2t)\mathbf{j}$.)

Krumningen $\kappa(t)$ er definert som $\left|\dfrac{dT}{ds}\right|$. Kjerneregelen gir $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{dT}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dT}{ds}|\mathbf{r}'(t)| = 3\dfrac{dT}{ds}$,
som gir $\dfrac{dT}{ds} = \dfrac{1}{3}\dfrac{dT}{dt}$. Krumningen blir derfor $\kappa(t) = \left|\dfrac{dT}{ds}\right| = \dfrac{1}{3}\left|\dfrac{dT}{dt}\right| = \underline{\dfrac{2}{3}}$.

Lengden av C er $\int_0^\pi ds = \int_0^\pi |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^\pi 3\,dt = \underline{3\pi}$.

Siden krumningen $\kappa(t) = 2/3$ er konstant og definert for alle t må kurven må være en del av en sirkelbue med radius $r = 1/\kappa = 3/2$. Siden lengden er $3\pi = 2\pi r$ må kurven være en hel sirkel, og sentrum er gitt ved $\mathbf{r}(t) + r\mathbf{N}(t) = \langle 0, 3/2\rangle$.

Oppgave 5a. Vi regner først ut $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \langle xz - 2yz\cos z^2, -yz, -xe^{xy}\rangle$. Integranden blir da $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = -xe^{xy}$. Dette gir

$$\iint_{S_2} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \int_0^1\int_0^1 -xe^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[-e^{xy}\right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 (1 - e^x)\,dx = \underline{2 - e}.$$

Oppgave 5b. Siden S_1 og S_2 har samme rand og $\mathbf{k}$ er normalvektoren til S_2 som peker oppover kan vi bruke Stokes' teorem to ganger:

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_{S_2} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS = \underline{2 - e}.$$

Merk: Vi kan også bruke Stoke's teorem én gang og regne ut linjeintegralet over C. Vi får da summen av fire enkle integraler og samme resultat. Alternativt kan man bruke divergensteoremet og at $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = 0$.

Oppgave 5c. Ved symmetri er $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{1}{2}$. For å finne $\bar{z}$ regner vi først ut volumet:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^{\sin\pi x\,\sin\pi y} dz\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \sin\pi y \sin\pi x\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \sin\pi x\,dx \int_0^1 \sin\pi y\,dy = \left(\int_0^1 \sin\pi t\,dt\right)^2 = \left(\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_{t=0}^1\right)^2 = \underline{\frac{4}{\pi^2}}. \end{aligned}$$

Vi finner så $\bar{z}$:

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{V}\iiint_T z\,dV = \frac{1}{V}\int_0^1\int_0^1\int_0^{\sin\pi x\,\sin\pi y} z\,dz\,dx\,dy = \\
&= \frac{1}{V}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}(\sin\pi x\,\sin\pi y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2V}\left(\int_0^1 \sin^2\pi t\,dt\right)^2 \\
&= \frac{\pi^2}{8}\left(\int_0^1 \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\pi t\right)\,dt\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\frac{\pi^2}{32}}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 6. Vi bruker divergensteoremet på integralet vi skal maksimere. Det vil si, for ethvert område T er

$$\iint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{G}\,dV.$$

Vi regner ut $\operatorname{div}\mathbf{G} = 7-3x^2+1-12y^2+4-27z^2 = 12-3x^2-12y^2-27z^2$. Integralet er størst når vi tar lar T være det området der $\operatorname{div}\mathbf{G}\geq 0$. Følgende ulikheter er ekvivalente:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{G} &\geq 0 \\
12-3x^2-12y^2-27z^2 &\geq 0 \\
12 &\geq 3x^2+12y^2+27z^2 \\
1 &\geq \frac{x^2}{2^2}+y^2+\frac{z^2}{(2/3)^2}
\end{aligned}
$$

Dette gir at T må være området begrenset av ellipsoiden i standardposisjon med halvakser 2, 1 og $\frac{2}{3}$.

Oppgave 7a. Vi har parameteriseringen $\mathbf{r}(u,v) = (2-\sin u)\cos v\,\mathbf{i} - \cos u\,\mathbf{j} + (2-\sin u)\sin v\,\mathbf{k}$. Vi finner

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} &= \big\langle -\cos u\cos v, \sin u, -\cos u\sin v\big\rangle \\
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} &= \big\langle -(2-\sin u)\sin v,\ 0\,,(2-\sin u)\cos v\big\rangle
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| &= \Big|\big\langle(2-\sin u)\sin u\cos v, -(2-\sin u)\cos u, (2-\sin u)\sin u\sin v\big\rangle\Big| \\
&= \big|2-\sin u\big|\sqrt{\sin^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v)+\cos^2 u} = 2-\sin u.
\end{aligned}
$$

Vi kan nå regne ut arealet:

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_S dS = \iint_R \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}(2-\sin u)\,du\,dv \\
&= \pi\left[2u+\cos u\right]_0^{2\pi} = \underline{4\pi^2}
\end{aligned}
$$

Tyngdepunktet sin z-komponent blir

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{A}\iint_S z\,dS = \frac{1}{A}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(2-\sin u)\sin v(2-\sin u)\,du\,dv \\
&= \frac{1}{A}\int_0^{\pi}\sin v\,dv\int_0^{2\pi}(2-\sin u)^2\,du \\
&= \frac{1}{A}\int_0^{\pi}\sin v\,dv\int_0^{2\pi}(4-4\sin u+\sin^2 u)\,du \\
&= \frac{1}{A}\Big[-\cos v\Big]_{v=0}^{\pi}\left[4u+4\cos u+\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)\right]_{u=0}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\cdot 9\pi = \underline{\frac{9}{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 7b. Likningen for sirkelen i xy-planet er $(x-2)^2+y^2=1$. Når denne dreies rundt y-aksen skriver vi $r=\sqrt{x^2+z^2}$ og bytter x med r. Likningen for torusen S' blir derfor $\underline{(\sqrt{x^2+z^2}-2)^2+y^2=1}$.

Vi sjekker at den parameteriserte flata S ligger på S' ved å sette inn. Venstresiden blir da:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x^2+z^2}-2)^2+y^2 &= (\sqrt{((2-\sin u)\cos v)^2+((2-\sin u)\sin v)^2}-2)^2+\cos^2 u \\
&= (\sqrt{(2-\sin u)^2}-2)^2+\cos^2 u = (|2-\sin u|-2)^2+\cos^2 u \\
&= (-\sin u)^2+\cos^2 u = 1,
\end{aligned}$$

og vi kan konkludere med at S ligger på omdreiningslegemet S'.