Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dag Wessel-Berg tlf. 91343

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
4 august 2008
kl.9-13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 25.08.2008

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 La $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ være tyngdepunktet (massemiddelpunktet) for kurven

$$x = t, \quad y = t^2/\sqrt{2}, \quad z = t^3/3 \quad \text{for } 0 \le t \le 2$$

med massetetthet 1.

Bestem verdien av $\overline{x}$.

Oppgave 2 Et modellfly i fart beskriver en kurve C i rommet. Posisjonen til flyet ved tidspunkt t er

$$(\cos t, \sin t, t) \quad \text{for } t \ge 0.$$

Vis at krumningen til kurven C er konstant.

Oppgave 3 Beregn

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

der C er kurven parametrisert ved

$$C: \qquad x = \arctan\sqrt{t}, \quad y = t^3 - 1, \quad z = \ln(1+t^2) \quad \text{for } 0 \le t \le 3$$

og $\mathbf{F}(x,y,z)$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2-1)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

OBS! $\arctan x = \tan^{-1} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Oppgave 4 Finn arealet av flaten gitt ved

$$x^2 - y + z^2 = 0 \quad \text{for } 0 \le y \le 4.$$

Oppgave 5 La S være flaten gitt ved

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{for } z \ge 0,$$

og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker vekk fra origo. Beregn integralet

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

når $\mathbf{F}(x,y,z) = (2y - xz^2)\mathbf{i} + (3x + y^2z)\mathbf{j} + (x^3y + z)\mathbf{k}$.

Oppgave 6 La T være området i rommet gitt ved

$$T: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 4.$$

Flaten gitt ved

$$3x^2 - y^2 = 0, \quad x \ge 0$$

deler området T i to deler, T_1 og T_2 der T_1 er den minste delen.

a) Finn volumet V av T_1.

b) La S_1 være hele overflaten til T_1. Bestem flateintegralet

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \quad \left(= \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS\right)$$

der $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen til S_1 som peker inn i T_1 og $\mathbf{F}(x,y,z)$ er vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (1-x)(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + (3-y-z)\mathbf{k}.$$

Oppgave 7 Finn og klassifiser de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x,y) = yx - 2xy^2 - x^2 - y^4.$$

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\ \theta,\ z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater $(\rho,\ \varphi,\ \theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$d\sigma = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv \quad (= dS \ \text{ i andre lærebøker})$$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$

$$\left(\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV\right)$$

Stokes teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$

$$\left(\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS\right)$$