Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Helge Maakestad tlf. 91703
Lisa Lorentzen tlf. 593548
Hilde Sande tlf. 91689
Dag Wessel-Berg tlf. 91343

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
Mandag 19. mai 2008
kl. 15–19

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 9. juni 2008

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Finn volumet av den delen av området $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ som ligger innenfor området $x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

Oppgave 2 Finn en likning for tangentplanet til flaten

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = u, \qquad z = \arctan(u/v)$$

i punktet $(0, 1, \pi/4)$.

Oppgave 3 Beregn

$$\int_{y=0}^{\sqrt{2}} \int_{x=-y}^{y} \ln(1+x^2+y^2)dx\,dy + \int_{y=\sqrt{2}}^{2} \int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(1+x^2+y^2)dx\,dy$$

ved å skifte til polarkoordinater.

Oppgave 4 En metallplate i xy-planet med massetetthet $\delta(x,y) = x^2 + y^2$ er avgrenset av linjene

$$y = 2x + 4, \quad y = 2x - 2, \quad y = 5 - x, \quad y = -x.$$

Finn massen til metallplaten.

Oppgave 5 Kurven C er gitt i polarkoordinater ved

$$C: \qquad r = \frac{3}{2} + \cos\theta \quad \text{for } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y)$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy - 2y)\mathbf{i} + (x^2 + y)\mathbf{j}.$$

a) Finn arealet av området innenfor kurven C.

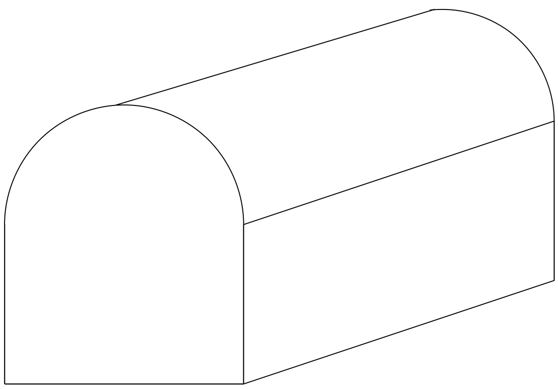
b) Finn verdien av integralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

når C er orientert mot klokken.

c) Finn fluksen av $\mathbf{F}$ over C i retning $\mathbf{n}$ der $\mathbf{n}$ er den enhetsnormalen til C som peker vekk fra origo.

Oppgave 6



Et lagertelt med fasong som vist på figuren skal ha overflate 20 m^2 (bunn + tak + vegger). Bunnen skal være rektangulær og gavlveggen skal bestå av et rektangel pluss en halvsirkel. Bestem målene på teltet slik at volumet blir størst mulig.

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ \ B = f_{xy},\ \ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\ \theta,\ z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater $(\rho,\ \varphi,\ \theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$d\sigma = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv \quad (= dS \text{ i andre lærebøker})$$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

$$\Big(\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV \Big)$$

Stokes teorem: $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$\Big(\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (\mathrm{curl}\, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \Big)$$