Oppgave 14.5.19.

Parametrisering:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = 2r \quad \text{for } 0 \le \theta \le 2\pi, \ 2 \le 2r \le 6.$$

$\mathbf{r}(r,\theta) = \langle r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 2r\rangle$.

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \langle -2r\cos\theta,\ -2r\sin\theta,\ r\rangle.$$

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{5r^2} = \sqrt{5}\, r.$$

Areal: $\displaystyle \iint_S d\sigma = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} \sqrt{5}\, r\, dr\, d\theta = 8\sqrt{5}\,\pi.$

Oppgave 14.5.27. Flaten S er gitt ved

$$\mathbf{r}(r,\theta) = \langle r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r\rangle \ \text{ for } r \ge 0, \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Punktet P_0 er $\mathbf{r}(2, \frac{\pi}{4}) = \langle \sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\rangle$.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(2, \frac{\pi}{4}) = \langle \cos\theta,\ \sin\theta,\ 1\rangle\Big|_{(2,\pi/4)} = \langle 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 1\rangle$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(2, \frac{\pi}{4}) = \langle -r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0\rangle\Big|_{(2,\pi/4)} = \langle -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\rangle$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(2, \frac{\pi}{4}) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(2, \frac{\pi}{4}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \langle -\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 2\rangle.$$

Ligning for tangentplanet:

$$\begin{aligned} \langle -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\rangle \cdot \langle x - \sqrt{2},\ y - \sqrt{2},\ z - 2\rangle &= 0 \\ -\sqrt{2}x + 2 - \sqrt{2}y + 2 + 2z - 4 &= 0 \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y). \end{aligned}$$

Ligning for S:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 = z^2.$$

For bilde: se side A-60 i læreboken.

Oppgave 14.5.32:

a) Når punktet $(f(u),\, g(u))$ i xy-planet roteres om x-aksen, danner det en sirkel med sentrum i punktet $(f(u),\, 0)$ og radius $g(u)$. Det vil si, sirkelen

$$x = f(u), \quad y^2 + x^2 = g(u)^2.$$

Når u gjennomløper intervallet $[a, b]$, vil disse sirklene beskrive en rotasjonsflate om x-aksen. Vi vil parametrisere denne flaten. Vi velger å bruke den u-en vi allerede har som den ene parameteren. Siden $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, velger vi den andre parametren vår v slik at

$$y = g(u)\cos v, \quad z = g(u)\sin v.$$

Det gir følgende parametrisering av rotasjonsflaten:

$$x = f(u),\ \ y = g(u)\cos v,\ \ z = g(u)\sin v \ \text{ for } \ a \le u \le b \ \text{ og } \ 0 \le v \le 2\pi.$$

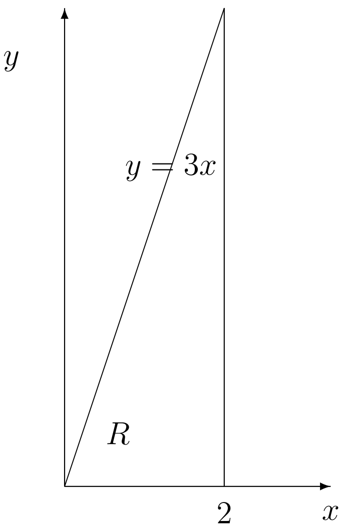
b) Kurven $x = y^2$ kan for eksempel parametriseres ved

$$x = u^2, \quad y = u \quad \text{for } \ u \ge 0.$$

Rotasjonsflaten får derved en parametrisering

$$x = u^2,\ \ y = u\cos v,\ \ z = u\sin v \ \text{ for } \ u \ge 0,\ \ 0 \le v \le 2\pi.$$

Oppgave 14.5.41:



Vi velger å bruke x og y som parametre ved parametriseringen av flaten $x^2 - 2y - 2z = 0$. Det gir:

$$x = x,\ \ y = y,\ \ z = \frac{x^2}{2} - y \ \text{ for } \ (x, y) \in R.$$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \langle -x,\, 1,\, 1 \rangle.$$

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{x^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2 + x^2}.$$

Arealet av flaten: $A = \iint_R |\mathbf{N}| dx\, dy$

Det vil si,

$$A = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{3x} \sqrt{2+x^2}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{2} \sqrt{2+x^2}\, 3x\, dx$$

Substitusjon $u = 2 + x^2$ gir $du = 2x\, dx$, så

$$A = \int_{u=2}^{6} u^{1/2} \cdot 3 \cdot \frac{du}{2} = \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{3}{2} \right]_2^6 = 6^{3/2} - 2^{3/2} = 6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}.$$

Oppgave 14.5.42:

Vi velger å ta utgangspunkt i kulekoordinater når vi parametriserer flaten. Her er $\rho = \sqrt{2}$ hele tiden, så parametrene vi velger er φ og θ slik at:

$$x = \sqrt{2} \sin\varphi \cos\theta, \quad y = \sqrt{2} \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \sqrt{2} \cos\varphi$$

for $0 \le \theta \le 2\pi$ og $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Det gir

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta & \sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta & -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta & \sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \langle -2\sin^2\varphi\cos\theta,\ -2\sin^2\varphi\sin\theta,\ \sqrt{2}\cos\varphi\sin\varphi \rangle. \\ |\mathbf{N}|^2 &= 4\sin^4\varphi\cos^2\theta + 4\sin^4\varphi\sin^2\theta + 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi \\ &= 4\sin^4\varphi + 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 4\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Arealet av flaten:

$$A = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} 2\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = 2\int_{\theta=0}^{2\pi} \Big[-\cos\varphi \Big]_0^{\pi/4} d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) d\theta = 2(2-\sqrt{2})\pi.$$

Oppgave 14.6.23:

Flaten S er gitt ved $z = \sqrt{x^2+y^2}$ for $1 \le z \le 2$. Vi velger å bruke r og θ (basert på sylinderkoordinater) som parametre. Det gir:

$$S: \quad x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ z = r \ \text{ for } \ 1 \le r \le 2,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \langle -r\cos\theta,\ -r\sin\theta,\ r \rangle.$$

Denne normalvektoren peker riktig vei i forhold til oppgaveteksten. Derfor er fluksen

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dr\,d\theta$$

der

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \langle -r\cos\theta,\ -r\sin\theta,\ r^2\rangle \cdot \langle -r\cos\theta,\ -r\sin\theta,\ r\rangle = r^2 + r^3$$

slik at

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r^2+r^3)dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}+\frac{r^4}{4}\right]_1^2 d\theta = \int_0^{2\imath}\left(\frac{7}{3}+\frac{15}{4}\right)d\theta = \frac{73\pi}{6}.$$

Oppgave 14.6.33:

Flaten S er gitt ved $z = 4 - y2$ for $0 \le x \le 1$ og $0 \le z \le 4$. Vi velger å bruke x og y som parametre. Det gir:

$$S: \quad x = x, \quad y = y, \quad z = 4 - y^2 \text{ for } 0 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 2.$$

$$\mathbf{N} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \langle 0,\ 2y,\ 1\rangle.$$

Denne normalvektoren peker riktig vei i forhold til oppgaveteksten. Videre er

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \langle x^2,\ x,\ -3z\rangle\cdot\langle 0, 2y, 1\rangle = 2xy - 3z = 2xy - 12 + 3y^2.$$

Derfor er fluksen

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=-2} 1^2(2xy - 12 + 3y^2)dy\,dx = \int_0^1 \left[xy^2 - 12y + y^3\right]_{y=-2}^{2} dx = -32.$$

Oppgave 14.6.39:

Arealet av hele kuleflaten er $4\pi a^2$. Arealet av den delen, S, som ligger i første oktant er $4\pi a^2/8 = \pi a^2/2$.

Ser vi på S i kulekoordinater, er den gitt ved

$$\rho = |a| \quad \text{for } 0 \le \theta \le \pi/2, \ 0 \le \varphi \le \pi/2.$$

Symmetri gjør at tyngdepunktet må ligge i et punkt $(\overline{\rho},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4})$. Det vil si, i et punkt $(\overline{z},\ \overline{z},\ \overline{z})$ i kartesiske koordinater, der

$$\overline{z} = \frac{\iint_S z\,d\sigma}{\pi a^2/2} = \frac{2}{\pi a^2}\iint_S |a|\cos\varphi\,d\sigma.$$

Parametrisering av S:

$$x = |a| \sin\varphi \cos\theta, \quad y = |a| \sin\varphi \sin\theta, \quad z = |a| \cos\varphi$$

gir på samme måte som i oppgave 14.5.2 at $|\mathbf{N}| = a^2 \sin\varphi$. Derved er

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \frac{2}{\pi a^2} \int_{\varphi=0}^{pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} |a|^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{2|a|}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\varphi \, d\varphi = \frac{|a|}{2} \left[\frac{-\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{|a|}{2}.\end{aligned}$$

Tyngdepunktet er derfor $(|a|/2, \, |a|/2, \, |a|/2)$.

Oppgave 14.7.7.

Ved Stokes teorem gjelder

$$I = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er skjæringskurven mellom S og xy-planet i positiv omløpsretning.

Kurven C er gitt ved

$$z = 0, \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Parametrisering av C:

$$x = 3\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta, \quad z = 0 \text{ for } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Integralet blir derfor

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi} \langle y, \, x^2, \, (x^2 + y^4)^{3/2} \sin e^{\sqrt{xyz}} \rangle \cdot \langle -3\sin\theta, \, 2\cos\theta, \, 0 \rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-3y\sin\theta + 2x^2\cos\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (-6\sin^2\theta + 18\cos^3\theta) d\theta = -6 \cdot \pi + 18 \cdot 0 = -6\pi.\end{aligned}$$

Oppgave 14.7.11:

Ved Stokes teorem følger at dette integralet er lik

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

for enhver slik flate.

Oppgave 14.7.19a:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \langle 2x, 2y, 2z\rangle = \nabla(x^2+y^2+z^2) = \nabla f(x,y,z).$$

Ved Stokes teorem gjelder at

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S (\nabla\times\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S \mathbf{0}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0.$$

Oppgave 14.8.7:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_D (0+x-1)dV = \iint_{x^2+y^2\le 4}\int_{z=0}^{x^2+y^2}(x-1)dV.$$

Vi bytter til sylinderkoordinater:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{r^2}(r\cos\theta-1)r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(r^4\cos\theta - r^3)dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^5}{5}\cos\theta - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{32}{5}\cos\theta - 4\right)d\theta = -8\pi.\end{aligned}$$

Oppgave 14.8.11:

Skjæringskurven mellom planet $y+z=4$ og xy-planet er linjen $y=4$ som tangerer ellipsen $4x^2+y^2=16$. Derfor står D på xy-planet med bunn $4x^2+y^2\le 16$, vertikale vegger, og tak $z=4-y$.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_D (2z-x-2z)dV = -\iiint_D x\,dV.$$

Symmetrien viser at dette integralet blir null.

Oppgave 14.8.22:

Vi har $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 1-2+1 = 0$, slik at den totale fluksen ut av hele boksen er null. Fluksen ut av bunnen er

$$\iint_{\text{Bunn}} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})dA = -\iint_{\text{Bunn}}(0+3)dA = -3.$$

Fluksen ut av siden S_1 i xz-planet er

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot(-\mathbf{j})dA = \iint_{S_1} 0\,dA = 0.$$

Fluksen ut av siden S_2 i yz-planet er

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{i}) dA = \iint_{S_2} 0 \, dA = 0.$$

Derfor er fluksen ut av toppen lik $0 - (-3) = 3$.

Oppgave 14.8.25:

Divergensteoremet sier at

$$\frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{1}{3} \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \frac{1}{3} \iiint_D (1 + 1 + 1) dV = \iiint_D dV$$

som er volumet av D.