LØSNINGSFORSLAG FOR EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

4 august 2008

Oppgave 1 Kurven, la oss kalle den C, er gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \langle t,\, t^2/\sqrt{2},\, t^3/3\rangle \quad \text{for } \; 0 \le t \le 2.$$

Siden

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, t\sqrt{2}, t^2\rangle$$

og derved

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} = \sqrt{(1+t^2)^2} = 1 + t^2,$$

er lengden av C lik

$$L = \int_C ds = \int_0^2 |\mathbf{r}'(t)|dt = \int_0^2 (1+t^2)dt = \Big[t + \frac{t^3}{3}\Big]_0^2 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Derfor er

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{L}\int_C x\, ds = \frac{3}{14}\int_0^2 t(1+t^2)dt = \Big[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\Big]_0^2 \\ &= \frac{3}{14}\Big(2+4\Big) = \frac{9}{7}.\end{aligned}$$

Oppgave 2 Kurven C er beskrevet ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t,\, \sin t,\, t\rangle \quad \text{for } \; t \ge 0.$$

Her er

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \langle -\sin t, \cos t, 1\rangle,\\ v(t) = |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},\\ \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin t, \cos t, 1\rangle,\\ \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle \frac{1}{v(t)}\\ \kappa(t) &= \Big|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\Big| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 0}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Krumningen $\kappa(t)$ er altså konstant lik 1/2.

Oppgave 3 Kurven C er *ikke* lukket, men vektorfeltet er konservativt fordi

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2-1 & z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot 0 - \mathbf{j}\cdot 0 + \mathbf{k}(2x-2x) = \mathbf{0}.$$

Derfor kan man enten velge en ny trasé mellom endepunktene til C eller finne en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$.

Kurven C går fra $(0,-1,0)$ til $(\pi/3,\ 26,\ \ln 10)$.

Potensialfunksjonene er $f(x,y,z) = x^2y - y + z^3/3 + C$.

Derved er

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = f(\pi/3,\ 26,\ \ln 10) - f(0,-1,0) = \frac{\pi^2}{9}\cdot 26 - 26 + \frac{(\ln 10)^3}{3} - 0 - 1 - 0 = \frac{\pi^2}{9}\cdot 26 - 27 + \frac{(\ln 10)^3}{3}.$$

Oppgave 4 Siden flaten er gitt ved $y = x^2 + z^2$, kan vi innføre parametre r og θ slik at

$$x = r\cos\theta, \quad y = r^2, \quad z = r\sin\theta \quad \text{for } 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2.$$

På vektorform blir dette

$$\mathbf{r}(r,\theta) = \langle r\cos\theta,\ r^2,\ r\sin\theta\rangle.$$

Det fundamentale vektorproduktet er da

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & 2r & \sin\theta \\ -r\sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot 2r^2\cos\theta - \mathbf{j}(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta) + \mathbf{k}\cdot 2r^2\sin\theta,$$

og derved

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| = \sqrt{4r^4\cos^2\theta + r^2 + 4r^4\sin^2\theta} = r\sqrt{1+4r^2}.$$

Arealet av flaten er derved

$$A = \iint_S d\sigma = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\,d\theta\,dr = 2\pi\int_{r=0}^{2} r\sqrt{1+4r^2}\,dr.$$

Substitusjonen $u = 1+4r^2$ gir $du = 8r\,dr$ og derved

$$A = 2\pi\int_{u=1}^{17} u^{1/2}\frac{du}{8} = \frac{2\pi}{8}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{u=1}^{17} = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1).$$

Oppgave 5 La C betegne randen til S. Det vil si, C er ellipsen

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

i xy-planet. Vi velger retningen til C til å være „mot klokken". Ved Stokes theorem gjelder da at

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Ved Stokes teorem gjelder videre at

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, d\sigma$$

der R er området i xy-planet som ligger innenfor C. På R er $z = 0$, og

$$\mathbf{F}(x, y, 0) = \langle 2y,\, 3x,\, x^3 y \rangle.$$

Videre er

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial(3x)}{\partial x} - \frac{\partial(2y)}{\partial y} = 3 - 2 = 1,$$

slik at

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \text{arealet av } R = \pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi.$$

Oppgave 6 Området T er området innenfor en kuleflate med sentrum i origo og radius 2.

Flaten som deler T er satt sammen av to vertikale halvplan som skjærer xy-planet langs halv-linjene $y = \pm\sqrt{3}\,x$ for $x \geq 0$.

a) Vi har symmetri om xy-planet, og symmetri om xz-planet. Volumet av T_1 er derved 4 ganger volumet av skalken T_3 som står på xy-planet med grunnflate

$$R: \quad x = r\cos\theta, \;\; y = r\sin\theta, \;\; z = 0 \;\text{ for }\; 0 \leq r \leq 2, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi/3.$$

Altså

$$V = 4\iint_R z\, dA = 4\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA = 4\int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{\pi/3} \sqrt{4 - r^2}\, r\, d\theta\, dr = \frac{4\pi}{3}\int_{r=0}^{2} \sqrt{4 - r^2}\, r\, dr.$$

Substitusjonen $u = 4 - r^2$ gir $du = -2r\, dr$ og derved

$$V = \frac{4\pi}{3}\int_{u=4}^{0} u^{1/2}\frac{-du}{2} = \frac{2\pi}{3}\int_{u=0}^{4} u^{1/2} du = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \frac{2\pi}{3}\frac{2}{3}(8 - 0) = \frac{32\pi}{9}.$$

b) Ved divergensteoremet gjelder

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{T_1} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

der

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(1 - x)}{\partial x} + \frac{\partial(1 - x)}{\partial y} + \frac{\partial(3 - y - z)}{\partial z} = -1 + 0 - 1 = -2.$$

Derfor er

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -2\iiint_{T_1} dV = -2V = -\frac{64\pi}{9}.$$

Oppgave 7 Funksjonen er partiell deriverbar for alle x og y. De kritiske punktene er derfor alle punkter (x, y) der både $f_x(x, y) = 0$ og $f_y(x, y) = 0$. Med andre ord: alle punkter (x, y) som tilfredsstiller likningssystemet

$$\begin{aligned} &(1)\ \ f_x(x, y) = y - 2y^2 - 2x = 0 \\ &(2)\ \ f_y(x, y) = x - 4xy - 4y^3 = 0 \end{aligned}$$

Av (1): $x = y/2 - y^2$.

Innsatt i (2):

$$\tfrac{y}{2} - y^2 - 2y^2 + 4y^3 - 4y^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(\tfrac{1}{2} - 3y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \ \text{ eller } \ y = \tfrac{1}{6}.$$

For $y = 0$ blir $x = y/2 - y^2 = 0$. For $y = \frac{1}{6}$ blir $x = y/2 - y^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Funksjonen har derfor to kritiske punkter: $(0, 0)$ og $(\frac{1}{18}, \frac{1}{6})$.

Klassifisering av punktene:

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \\ &= -2(-4x - 12y^2) - [1 - 4y]^2 = 8x + 24y^2 - (1 - 4y)^2 \\ \Delta(0, 0) &= 8 \cdot 0 + 0 - (1 - 0)^2 = -1 < 0, \\ \Delta(\tfrac{1}{18}, \tfrac{1}{6}) &= \tfrac{8}{18} + \tfrac{24}{36} - (1 - \tfrac{4}{6})^2 = \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9} > 0. \end{aligned}$$

Punktet $(0, 0)$ er derfor et sadelpunkt og siden $f_{xx}(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}) < 0$: punktet $(\frac{1}{18}, \frac{1}{6})$ er et lokalt maksimum.