Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag til eksamen i TMA4105 MATEMATIKK 2

Mandag 19. mai 2008

Oppgave 1 Området ligger innenfor den sirkulære kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som har spiss i origo og akse langs den positive z-aksen. Det avgrenses av kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som har sentrum i origo og radius 2. Vi velger å bruke trippelintegral i kulekoordinater.

$$\begin{aligned}\text{Volum} &= \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \rho^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_{\rho=0}^{2} \Big[-\cos\varphi \Big]_{\varphi=0}^{\pi/4} \rho^2 d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_{\rho=0}^{2} \rho^2 d\rho = \frac{16\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

Oppgave 2 For å finne en likning for tangentplanet til flaten

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = u, \qquad z = \arctan(u/v)$$

i punktet $(0, 1, \pi/4)$, trenger vi en normalvektor til flaten i punktet. Vi kan bruke det fundamentale vektorproduktet

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

der

$$\mathbf{r}(u,v) = (u^2 - v^2)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + \arctan(u/v)\mathbf{k}.$$

Vi får

$$\mathbf{N}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 1 & \frac{1}{1+u^2/v^2} \cdot \frac{1}{v} \\ -2v & 0 & \frac{1}{1+u^2/v^2}(-\frac{u}{v^2}) \end{vmatrix} = -\frac{u\mathbf{i}}{u^2+v^2} + \frac{(2u^2 - 2v^2)\mathbf{j}}{u^2+v^2} + 2v\mathbf{k}.$$

I punktet er $u = 1$ og $v = 1$, slik at $\mathbf{N}(1,1) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Tangenten har derfor en likning på formen

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(1,1) \cdot \langle x - 0,\, y - 1,\, z - \frac{\pi}{4} \rangle &= 0 \\ -\frac{1}{2}x + 2z - \frac{\pi}{2} &= 0 \\ z &= \frac{1}{4}(x + \pi).\end{aligned}$$

Oppgave 3 Vi trenger et bilde av integrasjonsområdet for å skifte til polarkoordinater.

Området for det første integralet ligger mellom linjene $y = x$ og $y = -x$ for $0 \le y \le \sqrt{2}$ Dette er en trekant med hjørner i origo, i $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og i $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Området for det andre integralet ligger innenfor kurven $x^2 = 4 - y^2$ som er en sirkel med sentrum i origo og radius 2. Men vi skal bare ha med skalken der $\sqrt{2} \le y \le 2$. Denne skalken legger seg pent oppå trekanten. I polarkoordinater får vi at integralet er

$$\int_{r=0}^{2} \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \ln(1 + r^2) r \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{2} \ln(1 + r^2) r \, dr.$$

Her kan vi bruke substitusjonen $u = 1 + r^2$ som viser at integralet er lik

$$\frac{\pi}{2} \int_{u=1}^{5} \ln u \cdot \frac{du}{2} = \frac{\pi}{4} \Big[u \ln u - u \Big]_{u=1}^{5} = \frac{\pi}{4}(5 \ln 5 - 4).$$

Oppgave 4 Metallplaten har form som et parallellogram „på skjeve" i xy-planet. Vi bytter derfor variable. Ved å sette

$$u = y - 2x \quad \text{og} \quad v = y + x$$

er linjene som avgrenser platen endret til

$$u = 4, \quad u = -2, \quad v = 5 \quad \text{og} \quad v = 0.$$

Med disse variable er $x = (v - u)/3$ og $y = (u + 2v)/3$, slik at massetettheten er

$$x^2 + y^2 = \Big(\frac{v - u}{3}\Big)^2 + \Big(\frac{u + 2v}{3}\Big)^2 = \frac{2u^2 + 2uv + 5v^2}{9}.$$

Jacobideterminanten for variableskiftet er

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Massen til metallplaten er derved

$$\begin{aligned} \iint (x^2 + y^2) dA &= \int_{v=0}^{5} \int_{u=-2}^{4} \frac{2u^2 + 2uv + 5v^2}{9} \cdot \Big| -\frac{1}{3} \Big| du \, dv \\ &= \frac{1}{27} \int_{v=0}^{5} \Big[\frac{2u^3}{3} + u^2 v + 5v^2 u \Big]_{u=-2}^{4} dv \\ &= \frac{1}{27} \int_{v=0}^{5} \Big(\frac{128}{3} + 16v + 20v^2 + \frac{16}{3} - 4v + 10v^2 \Big) dv \\ &= \frac{1}{27} \Big[\frac{144}{3} v + 12 \frac{v^2}{2} + 30 \frac{v^3}{3} \Big]_0^5 = \frac{1640}{27}. \end{aligned}$$

Oppgave 5

a) Arealet av området innenfor kurven C er

$$A = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3/2+\cos\theta} r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos\theta\right)^2 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{4} + 3\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\pi + \pi\right) = \frac{11\pi}{4}.$$

b) Kurven C er en lukket, enkel, glatt kurve i xy-planet, og

$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy - 2y)\mathbf{i} + (x^2 + y)\mathbf{j}$$

har kontinuerlige partiell deriverte i hele xy-planet. Vi kan derfor bruke Greens teorem:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - y)\right) dA$$

der D er området innenfor kurven C. Det vil si

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds = \iint_D (2x - 2x + 2) dA = 2\iint_D dA = 2\cdot(\text{arealet av } D) = \frac{11\pi}{2}.$$

c) Fluksen av $\mathbf{F}$ over C i retning $\mathbf{n}$ der $\mathbf{n}$ er den enhetsnormalen til C som peker vekk fra origo er gitt ved kurveintegralet

$$\Phi = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds.$$

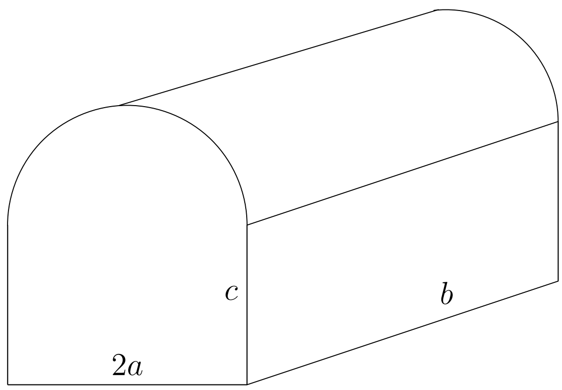
Også her kan vi bruke Greens teorem. For dette integralet tar det formen

$$\Phi = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y)\right) dA = \iint_D (2y+1) dA.$$

Ved symmetri ser man at $\iint_D y\, dA = 0$. Derved er Φ lik arealet av D, altså

$$\Phi = \frac{11\pi}{4}.$$

Oppgave 6 Vi setter navn på de tre sidene av lagerteltet, som vist på figuren.



Volumet av lagerteltet er da

$$V = f(a,b,c) = 2a \cdot b \cdot c + \frac{1}{2}\pi a^2 \cdot b = 2abc + \frac{1}{2}\pi a^2 b$$

og overflaten av teltet (inkludert bunn) er

$$A = g(a,b,c) = 2a \cdot b + 2 \cdot (2a) \cdot c + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi a \cdot b.$$

Vi vil finne maksimum for V under betingelsen av at $A = 20$. Vi bruker Lagranges multiplikatormetode som gir ligningene

$$\begin{aligned} \nabla f(a,b,c) &= \lambda \nabla (g(a,b,c) - 20) \\ g(a,b,c) &= 20 \end{aligned}$$

Det vil si, vi har de fire ligningene

$$\begin{aligned} &(1) \quad 2bc + \pi ab = \lambda(2b + 4c + 2\pi a + \pi b) \\ &(2) \quad 2ac + \frac{1}{2}\pi a^2 = \lambda(2a + 2c + \pi a) \\ &(3) \quad 2ab = \lambda(4a + 2b) \\ &(4) \quad (2+\pi)ab + 4ac + 2bc + \pi a^2 = 20 \end{aligned}$$

Det er klart at i maksimalpunktet kan verken a, b eller c være lik null. Derfor ser vi av ligning (3) at $4a + 2b \neq 0$, slik at

$$\lambda = \frac{2ab}{4a + 2b}.$$

Innsatt i (1) gir dette

$$\begin{aligned} (1) \quad (4a + 2b)(2bc + \pi ab) &= (2b + 4c + 2\pi a + \pi b)2ab \\ 4b^2 c &= 4ab^2 \\ a &= c. \end{aligned}$$

Innsatt i (2) gir dette

$$\begin{aligned}(2) \quad (2ac + \frac{1}{2}\pi a^2)(4a + 2b) &= (2a + 2c + \pi a)2ab \\ (2c^2 + \frac{1}{2}\pi c^2)(4c + 2b) &= (4c + \pi c)2cb \\ (8 + 2\pi)c &= 4b + \pi b \\ b &= 2c.\end{aligned}$$

Innsatt i (4) gir dette

$$\begin{aligned}(4) \quad (2 + \pi)2c^2 + 4c^2 + 4c^2 + \pi c^2 &= 20 \\ c^2(12 + 3\pi) &= 20 \\ c &= \sqrt{\frac{20}{3(4+\pi)}} = 2\sqrt{\frac{5}{3(4+\pi)}}.\end{aligned}$$

Målene på teltet er derfor (med den valgte notasjonen her):

$$a = 2\sqrt{\frac{5}{3(4+\pi)}}, \qquad b = 4\sqrt{\frac{5}{3(4+\pi)}}, \qquad c = 2\sqrt{\frac{5}{3(4+\pi)}}.$$