Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 73 59 34 68
Trond Digernes tlf. 73 59 35 17
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

Fredag 14. mai 1999
Tid: 0900–1400

Hjelpemidler: Typegodkjent kalkulator med tomt minne,
Rottmann: *Matematisk formelsamling.*

Oppgave 1 besvares uten begrunnelse. På de andre oppgavene må det være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

i) Hvilket av planene

$$(1)\quad x - y + z = 0, \qquad (2)\quad x + 2y - 2z = 4 \qquad \text{eller} \qquad (3)\quad x + 2y - 2z = 6$$

er tangentplan til flata $xy^2 + xz^2 = 4$ i punktet $P(2, 1, -1)$?

ii) Hvilket av de itererte integralene

$$(1)\ \int_1^{e^x}\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy, \quad (2)\ \int_1^{e}\int_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{eller} \quad (3)\ \int_1^{e}\int_0^{\ln y} f(x,y)\,dx\,dy$$

kan $\int_0^1 \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx$ omformes til ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen?

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x,y) = e^{xy}$. La R være området (inklusive randpunktene) i 1. kvadrant i xy-planet begrenset av linjene $y = 2x$ og $x = 2y$ og kurvene $xy = 1$ og $xy = 2$.

a) Finn, og klassifiser, eventuelle kritiske punkter for f. Bestem største verdi M og minste verdi m for f på R.

Oppgave 2 fortsetter på side 2

b) Bruk substitusjonen $u = xy$, $v = y/x$ til å beregne dobbeltintegralet

$$\iint_R f(x, y)\, dA.$$

Finn også arealet A av R, og kontroller at ulikheten

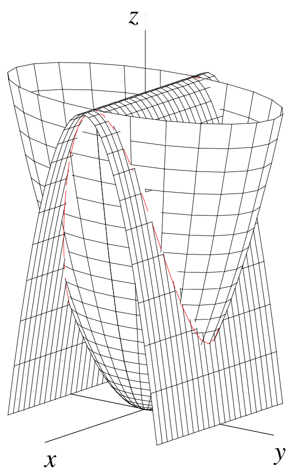
$$m \cdot A \le \iint_R f(x, y)\, dA \le M \cdot A$$

er oppfylt.

Oppgave 3

a) Beregn volumet av legemet som er begrenset av flatene (se figuren)

$$z = 4x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad z = 4 - 3y^2.$$



b) Et insekt beveger seg (mot urviseren sett ovenfra) langs skjæringskurven mellom de to flatene. Anta at temperaturen i punktet (x, y, z) er gitt ved funksjonen

$$T(x, y, z) = 10 + (x^2 + y^2 + 2z^2)/3.$$

Hvor stor temperaturendring per lengdeenhet langs skjæringskurven opplever insektet i punktet $P(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 5/2)$?

Oppgave 4

La a være en konstant, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y^2 z)\mathbf{i} + axyz\mathbf{j} + (xy^2 - 2z)\mathbf{k}.$$

a) Bestem a slik at vektorfeltet $\mathbf{F}$ blir konservativt. Bestem i dette tilfellet en funksjon $f(x, y, z)$ slik at $\nabla f = \mathbf{F}$.

b) La K være kurven med posisjonsvektor

$$\mathbf{r}(t) = t^4\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Finn lengden av K. Beregn arbeidet

$$W = \int_K \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

som blir utført av $\mathbf{F}$ med $a = 2$ ved å føre en partikkel fra $(0, 0, 0)$ til $(1, 4, 9)$ langs kurven K.

Oppgave 5
Gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathbf{k}$$

definert for alle $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

a) La S_1 være kuleflata $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med enhetsnormalvektor $\mathbf{n}_1$ rettet mot origo. Beregn flateintegralet

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, dS.$$

Kan vi bruke divergensteoremet her? Begrunn svaret.

b) Finn div $\mathbf{F}$.

c) La S_2 være flata gitt i kulekoordinater ved

$$\rho = \frac{6}{3 - \cos\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

og la $\mathbf{n}_2$ være utoverrettet enhetsnormalvektor til S_2. Finn verdien av flateintegralet

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS.$$