# SIF5005 Matematikk 2
## 14. mai 1999
**Løsningsforslag**

Oppgavesettet har 10 punkter — 1, 2ab, 3ab, 4ab, 5abc — som teller likt ved bedømmelsen.

**1** **i)** alternativ (3), **ii)** alternativ (2).

**2** **a)** For å finne de kritiske punktene, setter vi $\partial f/\partial x$ og $\partial f/\partial y$ lik 0. Her er

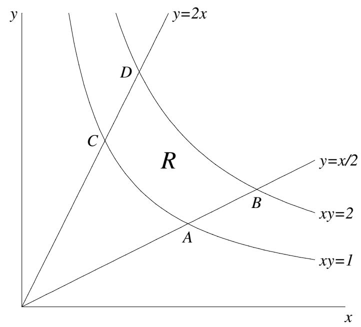
$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} = 0 \quad \text{for } y = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} = 0 \quad \text{for } x = 0.$$

Eneste kritiske punkt er $(0,0)$. Vi klassifiserer ved å bruke andrederiverttesten:

$$A = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}\Big|_{(0,0)} = 0 \qquad B = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = (1+xy)e^{xy}\Big|_{(0,0)} = 1$$
$$C = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}\Big|_{(0,0)} = 0 \qquad \Delta = AC - B^2 = -1.$$

Siden $\Delta$ er negativ, har $f$ sadelpunkt i $(0,0)$.

Vi søker så største verdi $M$ og minste verdi $m$ for $f$ på området $R$, se figuren. Siden det ikke fins kritiske punkter for $f$ i det indre av $R$, må såvel $M$ som $m$ oppnås på randkurven til $R$.
På kurven $xy = 1$ er $f(x,y) = e^{xy} = e$, og på kurven $xy = 2$ er $f(x,y) = e^{xy} = e^2$. På den rette linja $y = x/2$ mellom $A$ og $B$ er $f(x, x/2) = e^{x^2/2}$ voksende fra $f(A) = e$ til $f(B) = e^2$, og på den rette linja $y = 2x$ mellom $C$ og $D$ er $f(x, 2x) = e^{2x^2}$ voksende fra $f(C) = e$ til $f(D) = e^2$. Minimumsverdien blir følgelig $m = e$, og maksimumsverdien blir $M = e^2$.




**b)** Skriver vi randkurvene til $R$ som $xy = 1$, $xy = 2$, $y/x = 1/2$ og $y/x = 2$, ser vi at det tilhørende området $S$ i $uv$-planet blir begrenset av linjene $u = 1$, $u = 2$, $v = 1/2$ og $v = 2$. Omådet $S$ i $uv$-planet er følgelig rektanglet $1 \le u \le 2$, $1/2 \le v \le 2$.

Vi trenger også Jacobideterminanten $J(u,v) = \partial(x,y)/\partial(u,v)$, og beregner først

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v.$$

Da får vi

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2v} \qquad \text{siden} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1.$$

Dermed kan integralet beregnes:

$$\iint_R e^{xy}\, dA = \iint_S e^u\, |J(u,v)|\, du\, dv = \int_{1/2}^2 \int_1^2 e^u \frac{1}{2v}\, du\, dv = \int_{1/2}^2 \left[\frac{e^u}{2v}\right]_{u=1}^2 dv$$
$$= (e^2 - e) \cdot \left[\tfrac{1}{2} \ln v\right]_{1/2}^2 = (e^2 - e) \cdot \tfrac{1}{2}[\ln 2 - \ln \tfrac{1}{2}] = (e^2 - e) \ln 2.$$

For arealet $A$ får vi ved å bruke den samme substitusjonen:

$$A = \iint_R dA = \iint_S |J(u,v)|\, du\, dv = \int_{1/2}^2 \int_1^2 \frac{1}{2v}\, du\, dv = \int_{1/2}^2 \left[\frac{u}{2v}\right]_{u=1}^2 dv$$
$$= \left[\tfrac{1}{2} \ln v\right]_{1/2}^2 = \tfrac{1}{2}[\ln 2 - \ln \tfrac{1}{2}] = \ln 2.$$

Når vi setter inn tallverdier, blir ulikheten

$$m \cdot A \leq \iint_R f(x,y)\,dA \leq M \cdot A \quad \text{ekvivalent med} \quad e \cdot \ln 2 \leq (e^2 - e)\ln 2 \leq e^2 \cdot \ln 2.$$

Ved å forkorte med $e \cdot \ln 2$ ser vi at ulikheten er oppfylt siden $1 \leq e - 1 \leq e$.

**3** **a)** Flatene skjærer hverandre når $4x^2 + y^2 = 4 - 3y^2$, dvs. for $x^2 + y^2 = 1$. Det betyr at projeksjonen av legemet ned i $xy$-planet er sirkeldisken $D\colon x^2 + y^2 \leq 1$. Vi regner ut volumet ved hjelp av dobbeltintegral, og bruker polarkoordinater:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [z_{\text{topp}} - z_{\text{bunn}}]\,dA \\ &= \iint_D [(4 - 3y^2) - (4x^2 + y^2)]\,dA = \iint_D [4 - 4(x^2 + y^2)]\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 4(1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \Big[2r^2 - r^4\Big]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

**b)** Vi søker den retningsderiverte av temperaturfunksjonen $T$ i punktet $P$ i tangentretningen til skjæringskurven.

Fra **a)** vet vi at projeksjonen av skjæringskurven ned i $xy$-planet er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. Posisjonsvektoren til et punkt på skjæringskurven er følgelig

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}(4 - 3\sin^2 t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

der omløpsretningen er som forutsatt i oppgaven. Tangentvektor er $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t - 6\mathbf{k}\sin t\cos t$. Punktet $P$ har parameterverdi $t = \pi/4$ og en tangentvektor i $P$ er

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(\pi/4) = \big\langle -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -3 \big\rangle.$$

Vi trenger også gradientvektoren til $T$:

$$\nabla T(x,y,z) = \tfrac{1}{3}\langle 2x, 2y, 4z\rangle, \qquad \nabla T(P) = \tfrac{1}{3}\big\langle \sqrt{2}, \sqrt{2}, 10 \big\rangle.$$

Temperaturendringen per lengdeenhet i $P$ blir

$$D_{\mathbf{v}}T(P) = \nabla T(P) \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{3}\big\langle \sqrt{2}, \sqrt{2}, 10 \big\rangle \cdot \frac{\langle -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -3\rangle}{\sqrt{10}} = \frac{-30}{3\sqrt{10}} = -\sqrt{10}.$$

Temperaturen synker altså med ca 3,2 grader per lengdeenhet i $P$.

Alternativt kan vi finne tangentretningen i $P$ ved å ta kryssproduktet av normalvektorer $\mathbf{N}_1$ og $\mathbf{N}_2$ til de to flatene $z = 4x^2 + y^2$ og $z = 4 - 3y^2$ i $P$ (og passe på at $\mathbf{k}$-komponenten blir negativ). Bruker vi $\mathbf{N} = \langle -\partial z/\partial x, -\partial z/\partial y, 1\rangle$ og setter inn $x = y = 1/\sqrt{2}$, får vi

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \big\langle -4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} \,\big\rangle = 4\sqrt{2}\,\big\langle -1, 1, -3\sqrt{2}\,\big\rangle$$

som vi ser har samme retning som vektoren $\mathbf{v}$ vi fant ovenfor.

**4** **a)** $\mathbf{F}$ er konservativt for alle $(x,y,z)$ hvis og bare hvis $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ for alle $(x,y,z)$:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x + y^2 z & axyz & xy^2 - 2z \end{vmatrix} = \langle 2xy - axy, -(y^2 - y^2), ayz - 2yz\rangle.$$

Vi ser at $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, og følgelig $\mathbf{F}$ konservativt, hvis og bare hvis $a = 2$.

En potensialfunksjon $f$ for $\mathbf{F}$ må oppfylle

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 z, \qquad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz, \qquad (3) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy^2 - 2z.$$

Av (1) får vi $f(x,y,z) = x^2 + xy^2 z + \alpha(y,z)$. Innsatt i (2) gir dette $\partial f/\partial y = 2xyz + \partial\alpha/\partial y = 2xyz$. Det gir $\partial\alpha/\partial y = 0$ og følgelig $\alpha(y,z) = \beta(z)$ og $f(x,y,z) = x^2 + xy^2 z + \beta(z)$. Setter vi dette inn i (3), får vi $\partial f/\partial z = xy^2 + \beta'(z) = xy^2 - 2z$. Det gir $\beta'(z) = -2z$ og følgelig $\beta(z) = -z^2 + C$. En funksjon $f$ som oppfyller $\nabla f = \mathbf{F}$ er dermed (med $C = 0$)

$$f(x,y,z) = x^2 + xy^2 z - z^2.$$

Alternativt kan vi finne $f$ ved å beregne linjeintegralet $f(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$.

**b)** Buelengden er

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{(4t^3)^2 + (12t^2)^2 + (18t)^2}\,dt = \int_0^1 2t\sqrt{4t^4 + 36t^2 + 81}\,dt \\ &= \int_0^1 2t(2t^2+9)\,dt = \int_0^1 (4t^3 + 18t)\,dt = \Big[t^4 + 9t^2\Big]_0^1 = 10 \end{aligned}$$

Arbeidet finner vi lettest ved å bruke funksjonen $f$ vi fant i **a)** og integralregningens fundamentalteorem:

$$W = \int_K \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_{(0,0,0)}^{(1,4,9)} \nabla f\cdot\mathbf{T}\,ds = f(1,4,9) - f(0,0,0) = 64 - 0 = 64.$$

Vi kan også finne $W$ ved å regne ut integralet

$$W = \int_K \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_K (2x + y^2 z)\,dx + 2xyz\,dy + (xy^2 - 2z)\,dz$$

med den oppgitte parametriseringen $x = t^4$, $y = 4t^3$, $z = 9t^2$, $0 \le t \le 1$, eller — ved å bruke at integralet er uavhengig av vegen når $\mathbf{F}$ er konservativt — integrere f.eks. langs det rette linjestykket fra $(0,0,0)$ til $(1,4,9)$ .

**5** **a)** $S_1$ er en kuleflate med senter i origo og radius 1, og enhetsnormalvektoren $\mathbf{n}_1$ skal være rettet mot origo. Da er $\mathbf{n}_1 = -\langle x,y,z\rangle$. P $S_1$ finner vi $\mathbf{F} = \langle x,y,z\rangle$. Følgelig er $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 = -1$ på $S_1$. Dermed blir

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1\,dS = \iint_{S_1} (-1)\,dS = -\operatorname{areal}(S_1) = -4\pi.$$

$\mathbf{F}$ er diskontinuerlig i origo, så vi kan *ikke* bruke divergensteoremet på området (kula) med overflate $S_1$.

**b)** La $(x,y,z) \ne (0,0,0)$. For å finne $\operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{div}\langle P,Q,R\rangle = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z$, starter vi med

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^2 - 4x^2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^4} = \frac{-3x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

og innser ved symmetri at

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x^2 - 3y^2 + z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} \quad \text{og} \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

Ved addisjon får vi

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{-x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad (x,y,z) \ne (0,0,0).$$

**c)** Siden $\theta$ mangler i ligningen for $S_2$, er $S_2$ en rotasjonsflate med $z$-aksen som rotasjonsakse. På $S_2$ er $\rho \geq 3/2$ så $S_1$, med ligning $\rho = 1$, ligger inne i $S_2$. La $T$ være det romlige området som er begrenset av dissse flatene. ($T$ har form som en avocado der steinen er tatt ut.) Nå kan vi bruke divergensteoremet, siden $(0,0,0) \notin T$:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

Vi bruker kulekoordinater for å beregne trippelintegralet:

$$\begin{aligned}
\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV &= \iiint_T \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{6/(3-\cos\phi)} \frac{-1}{(\rho^2)^2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{6/(3-\cos\phi)} \frac{-1}{\rho^2} \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Big[\frac{1}{\rho}\Big]_1^{6/(3-\cos\phi)} \sin\phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\cos\phi) \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[\tfrac{1}{2}\cos\phi - \tfrac{1}{12}\sin^2\phi\Big]_0^{\pi} \, d\theta = \int_0^{2\pi} (-1) \, d\theta = -2\pi.
\end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, dS = -2\pi - (-4\pi) = 2\pi.$$

Vi kan også beregne flateintegralet ved å omforme det til et dobbeltintegral med $\phi$ og $\theta$ som variable. $S_2$ har ligning $\rho(\phi,\theta) = 6/(3-\cos\phi)$, og en parametrisering av $S_2$ er

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(\phi,\theta) &= \big\langle \rho(\phi,\theta)\sin\phi\cos\theta, \rho(\phi,\theta)\sin\phi\sin\theta, \rho(\phi,\theta)\cos\phi \big\rangle \\
&= \frac{6}{3-\cos\phi}\big\langle \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi \big\rangle, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

Ved derivasjon får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= \frac{6}{(3-\cos\phi)^2}\big\langle (3\cos\phi - 1)\cos\theta, (3\cos\phi-1)\sin\theta, -3\sin\phi \big\rangle, \\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \frac{6\sin\phi}{3-\cos\phi}\big\langle -\sin\theta, \cos\theta, 0 \big\rangle \\
\text{og} \qquad \mathbf{N} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{36\sin\phi}{(3-\cos\phi)^3}\big\langle 3\sin\phi\cos\theta, 3\sin\phi\sin\theta, 3\cos\phi - 1 \big\rangle.
\end{aligned}$$

Vi ser at $\mathbf{N}$ peker utover (oppover fra øvre del av flata og nedover fra nedre del) og får

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} \qquad \text{og} \qquad dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| d\phi \, d\theta = |\mathbf{N}| \, d\phi \, d\theta.$$

Vektorfeltet kan skrives $\mathbf{F} = \mathbf{r}/(\rho^2)^2$, og flateintegralet kan nå beregnes:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\mathbf{r}(\phi,\theta)}{\rho(\phi,\theta)^4} \cdot \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} |\mathbf{N}| \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(3-\cos\phi)^3}{216} \big\langle \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi \big\rangle \cdot \mathbf{N} \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\phi}{6} \big[ 3\sin^2\phi\cos^2\theta + 3\sin^2\phi\sin^2\theta + \cos\phi(3\cos\phi - 1) \big] \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\phi}{6} \big(3 - \cos\phi\big) \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[ -\tfrac{1}{2}\cos\phi - \tfrac{1}{12}\sin^2\phi \Big]_0^{\pi} \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi
\end{aligned}$$

som er samme svar som vi fikk ved å bruke divergensteoremet, men her etter litt mere regning.