Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelliste

Faglig kontakt under eksamen:

Trond Digernes	73 59 35 17
Berner Larsen	73 59 35 25
Lisa Lorentzen	73 59 35 48
Vigdis Petersen	73 59 16 50

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

Bokmål
Fredag 12. mai 2000
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
- Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller i uke 25.

Oppgave 1 skal besvares uten begrunnelse. På de andre oppgavene må det være med så mye tekst og mellomregning at resonnementet kommer tydelig frem. Rene kalkulatorsvar godtas ikke.

Oppgave 1 La T være legemet i første oktant begrenset av koordinatplanene $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ og planet

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1\,.$$

Hvilke(t) av integralene nedenfor gir volumet av T ?

$$(i)\quad \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2z}{3}} \int_0^{2-y-\frac{2z}{3}} dx\,dy\,dz \qquad (ii)\quad \int_0^3 \int_0^{2-x} \int_0^{\frac{3}{2}(2-x-y)} dz\,dx\,dy$$

$$(iii)\quad \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{\frac{3}{2}(2-x-y)} dz\,dy\,dx \qquad (iv)\quad \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{3}{2}(2-x-y)dy\,dx$$

Oppgave 2 Finn og klassifiser de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + \frac{1}{2}y^2\,.$$

Oppgave 3 Et plant legeme R i første kvadrant er avgrenset av hyperblene

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 = 2, \qquad xy = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad xy = 1\,.$$

Innfør nye variable $u = x^2 - y^2$ og $v = xy$, og bruk dette til å finne massen

$$m = \iint_R \delta \, dA$$

til R når massetettheten δ er proporsjonal med kvadratet av avstanden til origo (proporsjonalitetsfaktor k).

Oppgave 4 I et punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ på flaten $z = x^2 - y^2$ er tangentplanet parallelt med planet $z = 4x - 2y$. Finn P_0 og ligningen for dette tangentplanet.

Oppgave 5 La R være det plane området i første kvadrant som er begrenset av x-aksen, y-aksen og kurven

$$2x^{3/2} + y^3 + 5xy = 1\,,$$

randen inkludert. Finn største og minste verdi av funksjonen $f(x, y) = xy$ over området R.

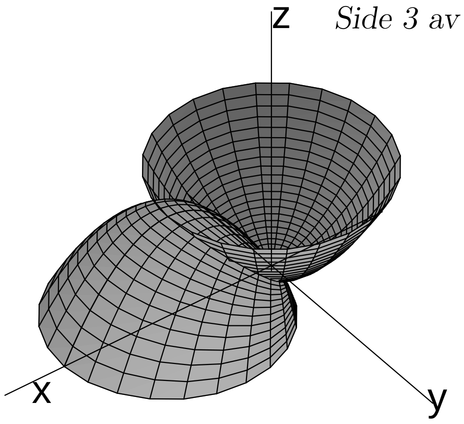
Oppgave 6 Kurven C er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k} \qquad \text{for } 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Bestem følgende størrelser i et vilkårlig punkt på kurven C:

- enhetstangentvektoren $\mathbf{T}$
- krumningen κ

b) Vis at C er skjæringskurven mellom en kuleflate og et plan. Bestem sentrum og radius i sirkelen C.



Oppgave 7

I denne oppgaven kan du få bruk for at

$$\int \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\theta}{8} + \frac{3}{8}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\cos^3\theta\sin\theta + C\,.$$

La T være legemet begrenset av paraboloidene

$$z = x^2 + y^2 \qquad \text{og} \qquad z = 1 - (x-1)^2 - y^2\,.$$

a) Vis at projeksjonen av T i xy-planet er en sirkelskive, og finn volumet av T.

b) La S_1 være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 1-(x-1)^2-y^2$, og la S_2 være den delen som ligger på paraboloiden $z = x^2+y^2$. Både S_1 og S_2 er orientert slik at enhetsnormalen $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent. La videre vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}\,.$$

Finn fluksen til $\mathbf{F}$ gjennom flatene S_1 og S_2, det vil si, beregn flateintegralene

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \qquad \text{og} \qquad \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS\,.$$

c) Vektorfeltet $\mathbf{G}$ er gitt ved

$$\mathbf{G} = e^{\sin z}\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}\,.$$

Beregn kurveintegralet (linjeintegralet)

$$\oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} \qquad \left(= \oint_C \mathbf{G}\cdot\mathbf{T}\, ds\right)$$

der C er skjæringskurven mellom de to paraboloidene, orientert mot urviseren sett ovenfra.
Hint: Kurven C ligger i et plan.