LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I FAGET 5005/7 MATEMATIKK 2
1. august 2000

Oppgave 1. (i) Ja. (ii) Ja. (iii) Nei.
Alternativt: (i) Ja. (ii) Ja. (iii) Ja.

Oppgave 2.

a)

$$\text{curl}\vec{F}(x,y) = \nabla \times \vec{F}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^y + ye^x + 2x & xe^y + e^x + 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Altså er $\vec{F}$ konservativt.
$f(x,y)$ er slik at $\nabla f(x,y) = \vec{F}(x,y)$. Det vil si,
$f_x(x,y) = e^y + ye^x + 2x$ som gir
$f(x,y) = xe^y + ye^x + x^2 + \varphi(y)$ der $\varphi(y)$ er en eller annen deriverbar funksjon av y. Videre er
$f_y(x,y) = xe^y + e^x + \varphi'(y) = xe^y + e^x + 1$. Altså er $\varphi'(y) = 1$ slik at $\varphi(y) = y + C$.
Vi velger f. eks. $C = 0$. Det gir
$f(x,y) = xe^y + ye^x + x^2 + y$

b)

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_{(0,1)}^{(0,e^{4\pi})} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = f(0, e^{4\pi}) - f(0,1) = 2(e^{4\pi} - 1).$$

c)

$$\int_C \vec{G} \cdot \vec{T}\, ds = \int_0^{4\pi} \Big\{e^t \cos t\, \vec{i} - e^t \sin t\, \vec{j}\Big\}\Big\{(e^t \sin t + e^t \cos t)\vec{i} + (e^t \cos t - e^t \sin t)\vec{j}\Big\} dt$$

$$= \int_0^{4\pi} e^{2t} dt = \frac{1}{2}\Big(e^{8\pi} - 1\Big)$$

Oppgave 3 Fra ligningen for tangentplanet ser vi at $\nabla f(1,1) = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

$$D_{\vec{i}+\vec{j}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \frac{\vec{i} + \vec{j}}{|\vec{i} + \vec{j}|} = \frac{(2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j})}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

La α være den søkte vinkelen. Da er $\tan\alpha = -1/\sqrt{2}$. Det vil si, $\alpha = \tan^{-1}(-1/\sqrt{2}) = -0.62$ (eller $\alpha = \pi - 0.62 = 2.52$).

Oppgave 4 Parameterfremstilling av skjæringskurven:

$x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \ln(1 - \cos t \sin t) - \frac{1}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \ln(1 - \frac{1}{2}\sin 2t) - \frac{1}{2}$

for $0 \le t \le 2\pi$. Vi finner kandidater til max og min ved å sette $dz/dt = 0$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sin 2t} \cdot (-\cos 2t) = 0 \quad \text{for } t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

der k er et vilkårlig heltall. Det gir

$$\begin{array}{lll}
t = \frac{\pi}{4}: & z = \ln(1 - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} = \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}. & \text{Min} \\
t = \frac{3\pi}{4}: & z = \ln(1 - \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2}) - \frac{1}{2} = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}. & \text{Max} \\
t = \frac{5\pi}{4}: & z = z(\frac{pi}{4}). & \text{Min} \\
t = \frac{7\pi}{4}: & z = z(\frac{3\pi}{4}). & \text{Max}
\end{array}$$

De høyeste punktene på skjæringskurveen er derfor $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2})$ og $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2})$. De laveste punktene er $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$ og $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$.

<u>Alternativt:</u> På skjæringskurven er

$$z = \ln(1 - xy) - \tfrac{1}{2}$$

Maksimum inntrer når xy er minst mulig på enhetssirkelen. Det vil si, når $xy = -\frac{1}{2}$. Minimum inntrer når xy er størst mulig på enhetssirkelen. Det vil si, når $xy = \frac{1}{2}$. Derav følger svaret.

<u>Alternativt</u> kan vi bruke Lagranges metode: Vi skal finne max og min for funksjonen $f(x, y, z) = z$ under bibetingelsene

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{og} \quad h(x, y, z) = \ln(1 - xy) - \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) - z = 0$$

Det gir ligningene

$$\begin{array}{ll}
(1) & 0 = 2x\lambda + (\dfrac{-y}{1 - xy} - x - 0)\mu \\
(2) & 0 = 2y\lambda + (\dfrac{-x}{1 - xy} - y - 0)\mu \\
(3) & 1 = 0\lambda + (-1 = \mu \\
(4) & x^2 + y^2 - 1 = 0 \\
(5) & \ln(1 - xy) - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) - z = 0
\end{array}$$

Vi ser med en gang at $x \neq 0$ og $y \neq 0$ fordi $x = 0$ bare når $y = 0$ og vice versa (se ligning (1) og (2)), noe som strider mot ligning (4).

Løser vi ligningssystemet, får vi at $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Det gir de samme fire punktene som før.

Flere alternativ finnes naturligvis også. For eksempel, løs $g(x, y, z) = 0$ med hensyn på y, sett inn i $h(x, y, z)$ og maksimer/minimer $f(x, y, z)$ under én bibetingelse.

Oppgave 5 Vi må dele opp integrasjonsområdet i to deler. Den ene delen R_1 er gitt ved at $|x - y| = x - y$ (det vil si, R_1 er den delen av R som er under linjen $y = x$). Den andre delen R_2 er gitt ved at $|x - y| = y - x$ (det vil si, R_2 er delen over den samme linjen). Det gir

$$\begin{aligned}
\int_R |x-y|\,dA &= \int_{R_1}(x-y)dA + \int_{R_2}(y-x)dA \\
&= \int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{x}(x-y)dy\,dx + \int_{x=1}^{2}\int_{y=x}^{e^x}(y-x)dy\,dx \\
&= \int_1^2\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx + \int_{x=1}^{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}-xe^x+\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{e^{2x}}{4}-xe^x+e^x+\frac{x^3}{6}\right]_1^2 = \frac{e^2}{4}(e^2-5)+\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

<u>Alternativt:</u>

$$\int_R |x-y|\,dA = \int_{x=1}^{2}\left[-\tfrac{1}{2}|x-y|(x-y)\right]_{y=1}^{e^x}dx = -\tfrac{1}{2}\int_1^2(|x-e^x|(x-e^x)-|x-1|(x-1))dx$$

der $(x-e^x)<0$ i hele integrasjonsområdet og $(x-1)>0$ i hele integrasjonsområdet. Derfor får vi

$$\int_R |x-y| = \tfrac{1}{2}\int_1^2((e^x-x)^2+(x-1)^2)dx$$

som gir det samme svaret.

Oppgave 6 Parametriseringen $x=\cos t$, $y=\sin t$ for $0\le t\le 2\pi$ av sirkelen C gir:

$$\begin{aligned}
\oint_C f(x,y)dx+g(x,y)dy &= \int_0^{2\pi}\Big\{f(\cos t,\sin t)(-\sin t)+g(\cos t,\sin t)\cos t\Big\}dt \\
&= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi}dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Resonnementet er galt fordi f og g ikke er deriverbare i hele området innenfor C. De har begge en diskontinuitet i origo.

Oppgave 7

a)

y–koordinaten til tyngdepunktet er gitt ved $\overline{y}=\dfrac{1}{V}\iiint_T y\,dV$ der V er volumet til T. Vi beregner dette ved å bruke sylinderkoordinater. Projeksjonen av skjæringskurven C mellom de to flatene $z=4r\cos t+5$ og $z=r^2+4r\sin t+4$ ned i xy–planet er gitt ved:

$$4r\sin\theta+5=r^2+4r\sin\theta+4 \qquad \text{det vil si: sirkelen} \quad r=1$$

Volumet er derfor gitt ved

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_T dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r^2+4r\sin\theta+4}^{4r\sin\theta+5} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}(1-r^2)r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Det gir

$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r^2+4r\sin\theta+4}^{4r\sin\theta+5} r\sin\theta\, r\, dz\, dr\, d\theta \\
&= \tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r^2\sin\theta\, dr\, r\theta = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\sin\theta\, d\theta = 0.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\operatorname{curl}\vec{F}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & y^2z^3 & x+y^6 \end{vmatrix} = \vec{i}(6y^5 - 3y^2z^2) - \vec{j} + \vec{k}
$$

Ifølge Stokes setning er

$$
\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\, ds = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\, dS
$$

der S er flaten i planet S_1 avgrenset av C og $\vec{n}$ er enhetsnormalvektor til S med positiv $\vec{k}$–komponent. Det vil si,

$$
\vec{n} = \frac{0\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}}{|0\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}|} = \frac{-4\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{17}}.
$$

$$
\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\, ds &= \iint_S \frac{1}{\sqrt{17}}(4+1)dS = \frac{5}{\sqrt{17}}\iint_S dS \\
&= \frac{5}{\sqrt{17}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\sqrt{r^2 + r^2z_r^2 + z_\theta^2}\, dr\, d\theta = \frac{5}{\sqrt{17}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{17} r\, dr\, d\theta = 5\pi
\end{aligned}
$$

Alternativt kan kurveintegralet regnes ut direkte. Som parametrisering av C kan man bruke:

$$
x = \cos\theta,\quad y = \sin\theta,\quad z = 4\sin\theta + 5 \quad \text{for } 0 \le \theta \le 2\pi.
$$