Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelliste

Faglig kontakt under eksamen:

Harald Hanche-Olsen	7359 3525
Lisa Lorentzen	7359 3548
Vigdis Petersen	7359 3523

EKSAMEN I FAG SIF5005 MATEMATIKK 2

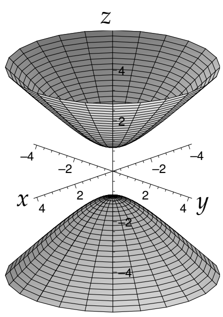
Bokmål
Mandag 14. mai 2001
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

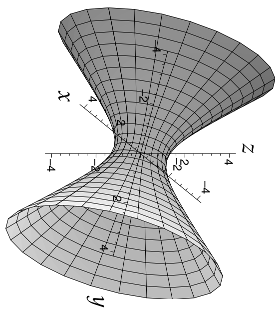
Sensuren faller i uke 25.

Oppgave 1 skal besvares uten begrunnelse. Alle andre svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgode svar.

Oppgave 1



A



B

Hvilken av de 6 ligningene nedenfor har graf som vist i figur A?
Hvilken av de 6 ligningene nedenfor har graf som vist i figur B?

$$
\begin{array}{llll}
(i) & x^2+y^2-z^2=1 & (iv) & x^2-y^2-z^2=1 \\
(ii) & x^2-y^2+z^2=1 & (v) & -x^2+y^2-z^2=1 \\
(iii) & -x^2+y^2+z^2=1 & (vi) & -x^2-y^2+z^2=1
\end{array}
$$

Oppgave 2 Bruk Lagranges metode til å finne største mulige verdi for funksjonen $f(x,y,z) = xyz$ når (x,y,z) skal ligge på ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Her er a, b og c gitte positive konstanter.

Oppgave 3 Et fly reiser gjennom øvre luftlag der temperaturen i (x,y,z) er $T(x,y,z)$. Finn temperaturendringen per minutt rundt flyet ved et tidspunkt der

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -4 \qquad \text{målt i °C/km},$$

når flyets fart er 1000 km/h og det flyr i retningen $\langle 7, 5, 1 \rangle$.

Oppgave 4 Finn en normalvektor til flaten

$$S: \quad xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

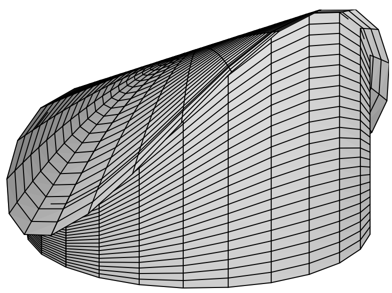
i punktet $(0,0,1)$. Vis at tangenten til kurven

$$x = \ln t, \quad y = t \ln t, \quad z = t \qquad \text{for } 0 < t < \infty$$

i punktet $(0,0,1)$ ligger i tangentplanet til S i punktet $(0,0,1)$.

Oppgave 5 En planlagt kirke har form som en sirkulær sylinder $x^2 + y^2 = 18^2$ som står på xy–planet med tak

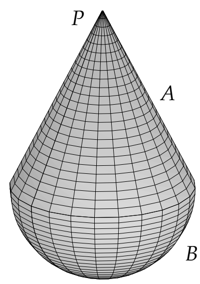
$$z = 20 - \frac{x^2}{25} + \frac{y}{2} \qquad \text{for } x^2 + y^2 \le 400.$$



a) Beregn kirkerommets volum V.

b) Valg av takbelegg er avhengig av hvor bratt taket er. Kan det brukes et belegg som tåler en helning på maksimalt 60° med horisontalplanet?

Oppgave 6 Et legeme T er satt sammen av to kompakte deler A og B. Del A er en rett sirkulær kjegle med høyde 4, grunnflateradius 2 og massetetthet $1/3$. Del B er en halvkule med radius 2 og massetetthet $4/3$. Delene er festet sammen som vist på figuren. La P betegne toppunktet i spissen av A. Finn avstanden mellom P og tyngdepunktet til T.



Oppgave 7 La vektorfeltet

$$\mathbf{F} = (2x + \cos yz)\mathbf{i} - \arctan y\,\mathbf{j} + \left(1 + \frac{z}{1+y^2}\right)\mathbf{k}$$

være gitt.

a) Beregn div $\mathbf{F}$.

b) Bestem fluksen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

opp gjennom den delen S av flaten $z = e^{1-x^2-y^2} - 1$ der $z \geq 0$.

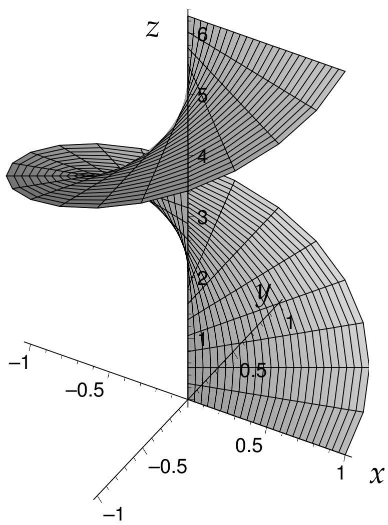
Oppgave 8 La vektorfeltet

$$\mathbf{G} = z\mathbf{i} + x^4 y\,\mathbf{j} + (1 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

være gitt, og la S være den delen av skrueflaten gitt i sylinderkoordinater ved $z = \theta$ der $0 \leq r \leq 1$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$, og vist på figuren nedenfor. Bruk Stokes' teorem til å beregne

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$$

der normalvektoren $\mathbf{n}$ på S peker oppover.



FORMELLISTE

Annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ B = f_{xy},\ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z,$
$r^2 = x^2 + y^2,\quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Kulekoordinater $x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z = \rho\cos\varphi,$
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,\quad dV = \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|\,du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm,\quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm,\quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm,\qquad dm = \delta\,dV$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$

$$\text{der } \nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$