LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I SIF5005 MATEMATIKK 2
august 2001

Oppgave 1.

a)

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2y + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ eller } y = -3x^2 \\ f_y(x,y) &= x^3 + 2xy + 40 = 0 \end{aligned}$$

Tilfellet $y = 0$ gir $x^3 = -40$ slik at $(-\sqrt[3]{40}, 0) = (-2\sqrt[3]{5}, 0)$ er et kritisk punkt.
Tilfellet $y = -3x^2$ gir at $x^3 - 6x^3 + 40 = 0$, det vil si, $x = 2$, slik at $(2, -12)$ er et kritisk punkt.
Flere kritiske punkt finnes ikke.

Klassifisering ved annenderiverttesten: Testfunksjonen

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = 6xy \cdot 2x - (3x^2 + 2y)^2$$

gir at $\Delta(-\sqrt[3]{40}, 0) < 0$ og $\Delta(2, -12) < 0$. Begge de kritiske punktene er derfor sadelpunkter.

b) $f(x,y)$ vokser med x og vokser med y i første kvadrant. Maksimum ligger derfor i punktet (1,1) der både x og y er størst, mens minimum ligger i $(0,0)$ der både x og y er minst i området. Største verdi er derfor $f(1,1) = 42$ og minste verdi er $f(0,0) = 0$.

Oppgave 2. $\nabla f(a,b,c) = \langle 2a, 2b, 8c \rangle$. Tangentplanet er derfor

$$T: \qquad 2a(x-a) + 2b(y-b) + 8c(z-c) = 0.$$

Punktet $(0,0,4)$ ligger i T hvis og bare hvis $-2a^2 - 2b^2 + 8c(4-c) = 0$. I tillegg må $a^2 + b^2 + 4c^2 = 16$, siden punktet (a,b,c) ligger på ellipsoideflaten. Vi har altså ligningene

$$\begin{aligned} &(1) \qquad a^2 + b^2 + 4c^2 - 16c = 0 \\ &(2) \qquad a^2 + b^2 + 4c^2 = 16 \end{aligned}$$

Subtraksjon viser at $16c = 16$, det vil si, $c = 1$. Innsatt i (2) gir det: $a^2 + b^2 = 12$. Med andre ord, kurven er en horisontal sirkel i høyde $z = 1$ med sentrum på z-aksen og radius $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Oppgave 3 Volumet til legemet er

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{2-\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{3}(2-\cos\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Substitusjonen $u = 2 - \cos\varphi$ gir

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_1^3 u^3 \, du = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^3 = \frac{40\pi}{3}$$

Oppgave 4

$$I = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{z-4}\,dy\,dz\,dx = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} x\,\frac{\sin 2z}{z-4}\,dz\,dx = \iint_R x\,\frac{\sin 2z}{z-4}\,dA$$

der R er området i første kvadrant av xz–planet, avgrenset av koordinataksene og parabelen $z = 4 - x^2$. Vi bytter integrasjonsrekkefølgen og får

$$I = \int_{z=0}^4 \int_{x=0}^{\sqrt{4-z}} x\,\frac{\sin 2z}{z-4}\,dx\,dz = \int_0^4 -\frac{1}{2}\sin 2z\,dz = \left[\frac{\cos 2z}{4}\right]_0^4 = \frac{1}{4}(\cos 8 - 1).$$

Oppgave 5 $f(x,y)$ er ikke kontinuerlig i origo fordi

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq f(0,0) = 0.$$

(Dette kan også vises ved å se at $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ er avhengig av θ, slik at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ikke eksisterer.)

Ved definisjonen av de partiell deriverte gjelder

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 \cdot x} \quad \text{eksisterer ikke.}$$
$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Oppgave 6

a) $\operatorname{div} \vec{F} = \dfrac{\partial(x^3 z)}{\partial x} + \dfrac{\partial(y^3 z)}{\partial y} + \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial z} = 3x^2 z + 3y^2 z = 3r^2 z$ i sylinderkoordinater.
Ved divergensteoremet har vi

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_T 3r^2 z\,dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} 3r^2 z \cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^1 \left[3r^3(1-r^2)\cdot\frac{1}{2}\right] dr = \pi \left[\frac{3}{4}r^4 - \frac{1}{2}r^6\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

b) Fluksen ut gjennom S_1 er lik fluksen ut gjennom hele S minus fluksen ut gjennom bunnen av halvkulen. Det vil si:

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\text{Bunn}} \vec{F}(x,y,0)\cdot(-\vec{k})\,dS$$
$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^{2\pi}\int_0^1 \langle 0,0,r^2\rangle \cdot \langle 0,0,-1\rangle\, r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi\int_0^1 r^3\,dr = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Oppgave 7

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\cos x & zg(y) & f(x)+y^2 \end{vmatrix} = \langle 2y - g(y), -f'(x) + \cos x, 0\rangle = \vec{0}$$

når $g(y) = 2y$ og $f'(x) = \cos x$, det vil si $f(x) = \sin x + C$. Videre skal $\int_{(0,0,0)}^{(0,0,2)} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = 6$, der integralet er uavhengig av veivalg. Vi velger derfor å bruke det vertikale linjestykket $x = 0$, $y = 0$, $z = t$ for $0 \leq t \leq 2$ som vei. Det gir

$$\int_{(0,0,0)}^{(0,0,2)} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_0^2 \langle z, 0, C\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle\, dt = 2C = 6.$$

Det vil si, $C = 6$, og de søkte funksjonene er $g(y) = 2y$ og $f(x) = \sin x + 3$.

Oppgave 8 Projeksjonen av C ned i xy–planet er gitt ved

$$x^2 + 2x + y^2 - 3 = 2x - 2, \quad \text{det vil si, } x^2 + y^2 = 1$$

som er en sirkel med sentrum i origo og radius 1. Parametriseringen

$$C: \quad x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = 2 - 2x = 2 - 2\cos\theta \quad \text{for } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

av C gir C retning mot klokken sett ovenfra, og

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds &= \oint_C yz\, dx - (xz + 3x^2)dy + 0\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} \{\sin\theta(2 - 2\cos\theta)(-\sin\theta) - (\cos\theta(2 - 2\cos\theta) + 3\cos^2\theta)\cos\theta\} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \{-2\sin^2\theta + 2\sin^2\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta + 2\cos^3\theta - 3\cos^3\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-2 + 2\cos\theta - 3\cos^3\theta\} d\theta = \int_0^{2\pi} (-2) d\theta = -4\pi.
\end{aligned}$$

Vi må da velge enhetsnormalen $\vec{n}$ til S med positiv $\vec{k}$-komponent. Det vil si,

$$\vec{n} = \frac{\nabla(x^2 + 2x + y^2 + z)}{|\nabla(x^2 + 2x + y^2 + z)|} = \frac{\langle 2x + 2, 2y, 1\rangle}{\sqrt{(2x + 2)^2 + (2y)^2 + 1}}.$$

Videre er

$$\operatorname{curl} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz - 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = \langle x, y, -6x - 2z\rangle$$

og derved $\operatorname{curl} \vec{F} \cdot \langle 2x + 2, 2y, 1\rangle = 4x^2 + 4y^2 - 6 = 4r^2 - 6$ i polarkoordinater. Projeksjonen R av S ned i xy–planet er lik sirkelskiven med sentrum i origo og radius 1. Derved har vi

$$\begin{aligned}
&\iint_S (\operatorname{curl} \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS \\
&\qquad = \iint_R (4r^2 - 6) \frac{1}{\sqrt{(2x + 2)^2 + (2y)^2 + 1^2}} \cdot \sqrt{1 + (-2x - 2)^2 + (-2y)^2} dA \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^2 - 6) r\, dr\, d\theta = -4\pi.
\end{aligned}$$