Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag 73 59 35 21
Per Hag 73 59 17 43

Bokmål

EKSAMEN I SIF5005 MATEMATIKK 2

Torsdag 1. august 2002
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Vedlegg: Formelliste

Sensurdato: 2. september

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1
Finn en normalvektor for hver av flatene

$$z = x^2 - y^2 \quad \text{og} \quad xyz + 30 = 0$$

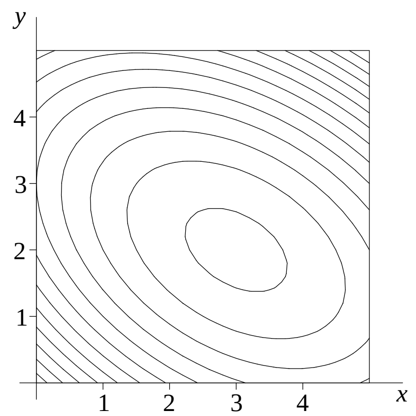
i punktet $P(-3, 2, 5)$.

Bestem også en tangentvektor til skjæringskurven mellom de to flatene i punktet P.

Oppgave 2
En flat metallplate ligger i xy-planet og dekker området der $0 \le x \le 5$ og $0 \le y \le 5$. Temperaturen i punktet (x, y) er gitt ved

$$T(x, y) = 12 + 16x + 18y - 2x^2 - 2xy - 3y^2.$$

Figuren til høyre viser nivåkurver (isotermer) for temperaturfunksjonen T.



a) Finn (ved partiellderivasjon) det kritiske punktet til T, og bestem den høyeste og den laveste temperaturen på metallplaten.

b) Bestem den høyeste temperaturen i punktene som ligger på den rette linjen

$$2x + y = 4.$$

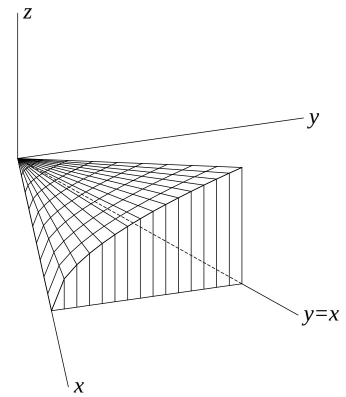
c) La P være punktet med koordinater $x = 1$, $y = 1$. Hva er den retningsderiverte for temperaturen T i punktet P i retning mot punktet $(3, 2)$? I hvilken retning har T størst retningsderivert i punktet P?

Anta nå at temperaturen i punktet (x, y) er gitt ved en uspesifisert funksjon $g(x, y)$. Du får oppgitt at den maksimale retningsderiverte for g i $P(1, 1)$ er lik 5 og oppnås i retning mot punktet $(3, 2)$. Hva er da den retningsderiverte for g i P i retning mot punktet $(2, 3)$?

Oppgave 3
Bytt integrasjonsrekkefølgen i trippelintegralet

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{xy}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

til $dy\, dx\, dz$. (Figuren til høyre viser integrasjonsområdet for trippelintegralet.)



Oppgave 4
La C være kurven med parameterfremstilling

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t/2, \qquad 0 \le t \le 4\pi.$$

a) Gjør rede for at C ligger på en sylinderflate og skisser C. Finn lengden av C.

b) La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}.$$

Finn curl $\mathbf{F}$. Er $\mathbf{F}$ et konservativt vektorfelt?

Beregn linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven gitt ovenfor.

Oppgave 5
La T være legemet begrenset av flatene

$$z = 2x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad z = 2x + x^2.$$

a) Vis at projeksjonen av T ned i xy-planet er en sirkelskive med senter i $(1, 0)$ og radius 1. Bestem volumet av T.
(Oppgitt formel: $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$.)

La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle 2x + x^2 - z, -2xy, z - x^2 \right\rangle .$$

b) Finn verdien av flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

der S er hele overflaten av T og $\mathbf{n}$ er utadrettet enhetsnormal.

c) Finn verdien av flateintegralet

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

der S_1 er den delen av overflaten av T der $z = 2x^2 + y^2$, og enhetsnormalen $\mathbf{n}$ for S_1 har negativ $\mathbf{k}$-komponent.

Oppgave 6
Finn punktene (x, y) der $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ og $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ for en funksjon $z = f(x, y)$ som oppfyller ligningen

$$e^{2zx - x^2} - 3e^{2zy + y^2} = 2.$$

FORMELLISTE

Annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ B = f_{xy},\ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $x = r\,\cos\theta,\quad y = r\,\sin\theta,\quad z = z,$

$r^2 = x^2 + y^2,\quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Kulekoordinater $x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta,\quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta,\quad z = \rho\,\cos\varphi,$

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,\quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm,\quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm,\quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm,\qquad dm = \delta\,dV$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$

$$\text{der } \nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$