NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5005 Matematikk 2
eksamen 2002–08–01

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1, 2abc, 3, 4ab, 5abc, 6, som teller likt ved bedømmelsen.

1 Vi skriver de to flateligningene på formen

$$F_1(x,y,x) = x^2 - y^2 - z = 0 \quad \text{og} \quad F_2(x,y,x) = xyz + 30 = 0,$$

og bruker gradientvektorer for å finne normalvektorene:

$$\begin{aligned} \nabla F_1(x,y,z) &= \langle 2x, -2y, -1 \rangle, \qquad & \mathbf{N_1} &= \nabla F_1(-3,2,5) = \langle -6,-4,-1 \rangle; \\ \nabla F_2(x,y,z) &= \langle yz, xz, xy \rangle, \qquad & \mathbf{N_2} &= \nabla F_2(-3,2,5) = \langle 10,-15,-6 \rangle. \end{aligned}$$

En tangentvektor $\mathbf{T}$ må stå vinkelrett både på $\mathbf{N}_1$ og $\mathbf{N}_2$. Følgelig er

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -4 & -1 \\ 10 & -15 & -6 \end{vmatrix} = \langle 9, -46, 130 \rangle$$

en tangentvektor i punktet $P(-3,2,5)$ for skjæringskurven mellom de to flatene.

2 **a)** Ved derivasjon får vi

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 16 - 4x - 2y \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 18 - 2x - 6y.$$

I det kritiske punktet er begge de partiellderiverte lik null, altså $2x + y = 8$ og $x + 3y = 9$. Av den første ligningen får vi $y = 8 - 2x$ som innsatt i den andre gir $x + 3(8 - 2x) = 9$, det gir $x = 3$ og følgelig $y = 2$. Det kritiske punktet er altså $(3,2)$.

Av figuren med nivåkurver for $T(x,y)$ ser vi at ekstremaltemperaturene oppnås i det kritiske punktet (som vi har regnet ut til å være $(3,2)$) og i et av (eller begge) hjørnepunktene $(0,0)$ og $(5,5)$. Regner vi ut temperaturen i disse tre punktene, får vi

$$T(3,2) = 54, \qquad T(0,0) = 12, \qquad T(5,5) = 7.$$

Følgelig er $T_{\max} = 54$ og $T_{\min} = 7$.

Ved å telle nivåkurvene, kunne vi sett at det må være i hjørnet $(5,5)$ (og ikke i $(0,0)$) at vi har ekstremaltemperatur. Vi kunne også funnet $T_{\max}$ og $T_{\min}$ uten bruk av nivåkurvene ved å drøfte temperaturen på randkurven, og sammenlignet den høyeste og laveste temperaturen på randkurven med temperaturen i det kritiske punktet $(3,2)$.

b) Vi søker maksimum for $T(x,y)$ under bibetingelsen

$$g(x,y) = 2x + y - 4 = 0$$

og kan bruke Lagranges multiplikatormetode. Vi har

$$\nabla T(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 16 - 4x - 2y = 2\lambda, \\ 18 - 2x - 6y = \lambda, \end{cases}$$

og får følgelig $8 - 2x - y = \lambda = 18 - 2x - 6y$. Det gir $y = 2$ som innsatt i $2x + y - 4 = 0$ gir $x = 1$. Maksimumstemperaturen på linjen $2x + y = 4$ er følgelig $T(1, 2) = 46$. At dette er maksimum (og ikke minimum), ser vi av nivåkurvene til T.

Som kontroll kan vi tegne inn linjen $2x + y = 4$ på figuren med nivåkurver, og se at $2x + y = 4$ tangerer en nivåkurve (som må være $T(x, y) = 46$) i punktet $(1, 2)$.

c) Den retningsderiverte $D_{\mathbf{u}}T(P)$ for T i punktet $P(1, 1)$ i retningen $\mathbf{u}$ mot punktet $Q(3, 2)$ er gitt ved

$$D_{\mathbf{u}}T(P) = \nabla T(P) \cdot \mathbf{u} = \nabla T(P) \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \langle 10, 10\rangle \cdot \frac{\langle 2, 1\rangle}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}.$$

Størst retningsderivert i punktet P har T i retningen $\nabla T(P)/|\nabla T(P)| = \langle 1, 1\rangle /\sqrt{2}$.

For gradientvektoren $\nabla g(P)$ har vi

$$\nabla g(P) = 5\mathbf{u} = 5 \cdot \frac{\langle 2, 1\rangle}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,\langle 2, 1\rangle$$

siden $\nabla g(P)$ skal ha lengde lik 5 (maksimal retningsderivert for g i P) og retning lik enhetsvektoren $\mathbf{u}$ (retningen der den maksimale retningsderiverte for g i P oppnås). For den retningsderiverte $D_{\mathbf{w}}g(P)$ for g i punktet P i retningen $\mathbf{w}$ mot punktet $R(2, 3)$ får vi dermed

$$D_{\mathbf{w}}g(P) = \nabla g(P) \cdot \mathbf{w} = \nabla g(P) \cdot \frac{\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PR}|} = \sqrt{5}\,\langle 2, 1\rangle \cdot \frac{\langle 1, 2\rangle}{\sqrt{5}} = 4.$$

3 La T være integrasjonsområdet for trippelintegralet. Ved hjelp av figuren i oppgaveteksten ser vi at T kan beskrives som et y-enkelt område ved ulikhetene

$$z^2/x \le y \le x, \qquad (x, z) \text{ i } R,$$

der R er projeksjonen av T inn i xz-planet. R er begrenset av x-aksen, linjen $x = 1$ og linjen $z = x$ som er projeksjonen av skjæringskurven mellom flatene $z = \sqrt{xy}$ og $y = x$ inn i xz-planet. Dermed er

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{xy}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_z^1 \int_{z^2/x}^x f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.$$

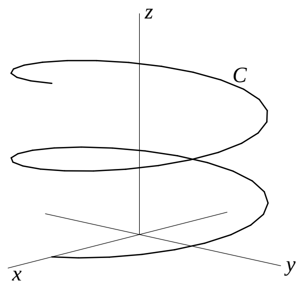
4 **a)** Siden

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{for alle } t,$$

ligger C på sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ som har radius 1 og akse langs z-aksen. C starter i $(1, 0, 0)$, snor seg to ganger rundt sylinderen og ender i punktet $(1, 0, 2\pi)$, se figuren.

Lengden av C er

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{4\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1/2)^2}\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\, dt = 2\pi\sqrt{5}\,. \end{aligned}$$



b) For $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ får vi

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & e^z \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 2 \rangle \,.$$

Siden $\operatorname{curl}\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ er $\mathbf{F}$ *ikke* et konservativt vektorfelt.

Linjeintegralet regner vi ut ved å bruke den oppgitte parametriseringen

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t/2, \quad 0 \le t \le 4\pi :$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C -y\,dx + x\,dy + e^z\,dz \\ &= \int_0^{4\pi} (-\sin t)(-\sin t\,dt) + (\cos t)(\cos t\,dt) + e^{t/2}(\tfrac{1}{2}\,dt) \\ &= \int_0^{4\pi} \left(1 + \tfrac{1}{2}e^{t/2}\right)dt = \left[t + e^{t/2}\right]_0^{4\pi} = 4\pi + e^{2\pi} - 1. \end{aligned}$$

5 **a)** På skjæringskurven mellom de to flatene er

$$2x^2 + y^2 = z = 2x + x^2.$$

Projeksjonen R av T ned i xy-planet er følgelig begrenset av sirkelen $x^2 + y^2 = 2x$, dvs. $(x-1)^2 + y^2 = 1$. R er altså en sirkelskive med senter i $(1,0)$ og radius 1.

Ved å sette inn (f.eks.) $x = 1$ og $y = 0$ får vi $z = 2$ på den første flaten og $z = 3$ på den andre. Dermed er

$$z_{\text{topp}} = 2x + x^2 \qquad \text{og} \qquad z_{\text{bunn}} = 2x^2 + y^2.$$

Vi kan bruke dobbeltintegral for å finne volumet av T:

$$V = \iint_R \left[z_{\text{topp}} - z_{\text{bunn}}\right] dA = \iint_R \left(2x - x^2 - y^2\right) dA.$$

Vi innfører polarkoordinater, sirkelen $x^2+y^2 = 2x$ har ligning $r = 2\cos\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, og ved å bruke den oppgitte integrasjonsformelen for $\int \cos^n x\,dx$ får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (2r\cos\theta - r^2)\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{2}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{2\cos\theta} d\theta = \frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta \\ &= \frac{2}{3}\underbrace{\left[\cos^3\theta\sin\theta\right]_0^{\pi/2}}_{0} + 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \underbrace{\left[\cos\theta\sin\theta\right]_0^{\pi/2}}_{0} + \int_0^{\pi/2} \cos^0\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

b) Vi kan bruke divergensteoremet for å beregne $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ og regner først ut divergensen til $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + x^2 - z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(z - x^2) = 3.$$

Dermed får vi, ved å bruke resultatet i **a)**,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_T 3\,dV = 3V = \frac{3\pi}{2}.$$

c) Vi søker $\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ der S_1 er den nedre delen (z_{bunn}) av overflaten til T. La den øvre delen av overflaten være S_2. På S_2 (med ligning $z = 2x + x^2$) er

$$\mathbf{F} = \left\langle 2x + x^2 - z, -2xy, z - x^2 \right\rangle \Big|_{z=2x+x^2} = \langle 0, -2xy, 2x\rangle\,,$$

og $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ og $dS = |\mathbf{N}|\,dx\,dy$ der normalvektoren $\mathbf{N}$ er rettet oppover og gitt ved

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left\langle -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right\rangle = \langle -2-2x, 0, 1\rangle\,.$$

Ved hjelp av resultatet i **b)** får vi

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{3\pi}{2} - \iint_R \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}\,|\mathbf{N}|\,dx\,dy \\
&= \frac{3\pi}{2} - \iint_R \langle 0, -2xy, 2x\rangle \cdot \langle -2-2x, 0, 1\rangle\; dx\,dy \\
&= \frac{3\pi}{2} - \iint_R 2x\,dx\,dy = \frac{3\pi}{2} - 2\,\overline{x}\cdot \text{areal}(R) = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

der $\overline{x}$ er x-koordinaten til tyngdepunktet $(1,0)$ til R.

Alternativt kan vi regne ut $\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ direkte, uten å bruke S_2 og resultatet fra **b)**, men det gir mere regning:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \ldots &= \iint_R \left\langle 2x - x^2 - y^2, -2xy, x^2 + y^2 \right\rangle \cdot \langle 4x, 2y, -1\rangle\; dx\,dy \\
&= \iint_R (7x^2 - 4x^3 - 8xy^2 - y^2)\,dx\,dy = \ldots = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Vi deriverer den oppgitte ligningen

$$e^{2zx-x^2} - 3e^{2zy+y^2} = 2$$

med hensyn på x og y, idet vi betrakter z som en funksjon av x og y:

$$(*) \qquad e^{2zx-x^2}\left(2x\frac{\partial z}{\partial x} + 2z - 2x\right) - 3e^{2zy+y^2}\left(2y\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$(**) \qquad e^{2zx-x^2}\left(2x\frac{\partial z}{\partial y}\right) - 3e^{2zy+y^2}\left(2y\frac{\partial z}{\partial y} + 2z + 2y\right) = 0.$$

Setter vi inn $\partial z/\partial x = 0$ i $(*)$, får vi $z = x$, og $\partial z/\partial y = 0$ i $(**)$ gir $z = -y$. Dermed har vi $x = z$ og $y = -z$ som så innsettes i den oppgitte ligningen. Det gir

$$\begin{aligned}
e^{z^2} - 3e^{-z^2} &= 2, \\
\left(e^{z^2}\right)^2 - 2e^{z^2} - 3 &= 0, \\
e^{z^2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = 1 \pm 2.
\end{aligned}$$

Følgelig er $e^{z^2} = 3$ og $z = \pm\sqrt{\ln 3}$ siden $e^{z^2} = -1$ ikke er mulig. Punktene der $\partial z/\partial x = 0$ og $\partial z/\partial y = 0$ er altså $(\sqrt{\ln 3}\,, -\sqrt{\ln 3}\,)$ og $(-\sqrt{\ln 3}\,, \sqrt{\ln 3}\,)$.