SIF5005 Matematikk 2, 12. mai 2003

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) La oss like godt gjøre unna all nødvendig derivasjon med én gang:

$$f_x = 3x^2 + y, \quad f_y = 3y^2 + x, \quad f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 6y.$$

For å finne kritiske punkter må vi løse ligningene $f_x = f_y = 0$, altså

$$3x^2 + y = 0, \quad 3y^2 + x = 0.$$

Tar vi $y = -3x^2$ fra den første ligningen og setter inn i den andre, får vi $27x^4 + x = 0$, med løsninger gitt ved $x = 0$ eller $27x^3 + 1 = 0$. Det siste gir $x = -\frac{1}{3}$. Husker vi så at $y = -3x^2$, har vi derfor disse kritiske punktene:

$$(x, y) = (0, 0), \quad (x, y) = (-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}).$$

For $(x, y) = (0, 0)$ finner vi

$$A = f_{xx}(0, 0) = 0, \quad B = f_{xy}(0, 0) = 1, \quad C = f_{yy}(0, 0) = 0, \qquad \Delta = AC - B^2 = -1 < 0,$$

så $(0, 0)$ er et *sadelpunkt*.

For $(x, y) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ finner vi

$$A = f_{xx}(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = -2, \quad B = f_{xy}(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = 1, \quad C = f_{yy}(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = -2,$$
$$\Delta = AC - B^2 = 3 > 0,$$

og siden $A < 0$ er $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ et *lokalt maksimum*.

b) Vi har

$$\nabla f(1, 2) = \big\langle f_x(1, 2), f_y(1, 2)\big\rangle = \langle 5, 13\rangle.$$

Det er altså i retningen langs vektoren $\langle 5, 13\rangle$ at den retningsderiverte er størst. Størrelsen på den retningsderiverte i denne retningen er $|\nabla f(1, 2)| = \sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{194}$. Om man ønsker å angi retningen med størst retningsderivert som en enhetsvektor, er det bare å normalisere gradienten: $\langle 5, 13\rangle/\sqrt{194}$. Enhetsvektoren med retning fra $(1, 2)$ mot origo er $\langle -1, -2\rangle/\sqrt{5}$, så den retningsderiverte av f i den retningen er

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\langle -1, -2\rangle \cdot \langle 5, 13\rangle = -\frac{31}{\sqrt{5}}.$$

Oppgave 2

a) ALTERNATIV 1: Vi tar hintet, og forsøker å minimalisere $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ (som er kvadratet av avstanden til z-aksen) med bibetingelsene $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 1 = 0$ og $h(x, y, z) = xyz - 1 = 0$. Lagranges multiplikatormetode gir $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, som skrevet ut gir de tre ligningene

$$2x = 2\lambda x + \mu yz, \quad 2y = 2\lambda y + \mu xz, \quad 0 = -\lambda + \mu xy.$$

Den siste ligningen gir $\lambda = \mu xy$, som vi setter inn i de to første og får

$$2x = (2x^2y + yz)\mu, \quad 2y = (2xy^2 + xz)\mu.$$

Dette gir videre $2x(2xy^2+xz) = 2y(2x^2y+yz)$, altså $x^2z = y^2z$. Siden x, y og z alle er positive må $x = y$.

Setter vi inn $y = x$ i bibetingelsene $g = 0$ og $h = 0$, får vi $2x^2 - z = 1$ og $x^2z = 1$. Den siste gir $x^2 = 1/z$ som vi setter inn i den første, og får $2/z - z = 1$. Multiplikasjon med z og litt rydding gir annengradsligningen $z^2 + z - 2 = 0$, med løsninger $z = \frac{1}{2}(-1 \pm 3)$. Siden $z > 0$ har vi bare løsningen $z = 1$. Dette gir $y = x = 1/\sqrt{z} = 1$, slik at $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ er eneste mulige kandidat for det nærmeste punktet.

Alternativ 2: Vi legger merke til at den første flaten, med en ligning som kan skrives $x^2+y^2 = 1 + z$, kan betraktes som unionen av en samling horisontale sirkler med sentrum på z-aksen og radius $\sqrt{1+z}$. Vi finner altså det søkte punktet på den av disse sirklene med minst radius (minst z) som inneholder noe punkt på kurven C.

Det er mange mulige fremgangsmåter for å undersøke for hvilke verdier av z denne sirkelen inneholder noe punkt fra C. Kanskje spesielt elegant er følgende:

Vi skriver ligningen for den andre flaten som $xy = 1/z$, multipliserer den med to og både legger den til og trekker den fra ligningen for den første flaten, som gir disse to ligningene:

$$(x+y)^2 = 1 + z + \frac{2}{z}, \quad (x-y)^2 = 1 + z - \frac{2}{z}.$$

Spesielt må vi ha $1 + z - 2/z \geq 0$. Vi finner $1 + z - 2/z = 0$ når $z = 1$ (som i alternativ 1), og dermed blir $z = 1$ minste mulige z som lar oss finne et slikt punkt vi søker. Ligningssystemet over får da løsningen $x = y = 1$.

b) Alternativ 1: De to flatene har normalvektorer gitt ved gradientene til henholdsvis g og h (der g og h er som i alternativ 1, punkt **a**). En tangentvektor til kurven må stå normalt på begge disse, så den er parallell med kryssproduktet

$$\nabla g \times \nabla h = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2x & 2y & -1 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (2xy^2 + xz)\,\mathbf{i} - (2x^2y + yz)\,\mathbf{j} + (2x^2z - 2y^2z)\,\mathbf{k}.$$

Setter vi inn koordinatene til det gitte punktet, får vi

$$\nabla g \times \nabla h = (3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\,\mathbf{i} + (-3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\,\mathbf{j} + 8\sqrt{2}\,\mathbf{k}.$$

Hastighetsvektoren er parallell med denne og har y-komponent 1, slik at vi må ha

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{-3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{6 + \sqrt{2}}{-6 + \sqrt{2}} = -\frac{19 + 6\sqrt{2}}{17}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{8\sqrt{2}}{-3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{-6 + \sqrt{2}} = -\frac{16 + 48\sqrt{2}}{17}. \end{aligned}$$

(Her og i alternativ 2 nedenfor forenkles brøkene ved å multiplisere teller og nevner med $6+\sqrt{2}$.)

Alternativ 2: Vi deriverer ligningene for de to flatene med hensyn på t. Med notasjonen $\dot{x} = dx/dt$ osv. får vi

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} - \dot{z} = 0, \quad \dot{x}yz + x\dot{y}z + xy\dot{z} = 0.$$

Setter vi inn de gitte verdiene (heriblant $\dot{y} = 1$) får vi

$$(2 + \sqrt{2})\dot{x} + (2 - \sqrt{2}) - \dot{z} = 0, \quad (2 - \sqrt{2})\dot{x} + (2 + \sqrt{2}) + \tfrac{1}{2}\dot{z} = 0.$$

Her kan vi for eksempel eliminere $\dot{z}$ ved å gange den siste ligningen med 2 og addere, som gir

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\frac{6 + \sqrt{2}}{6 - \sqrt{2}} \text{ og videre } \frac{dz}{dt} = \dot{z} = (2 + \sqrt{2})\dot{x} + (2 - \sqrt{2}) = -\frac{16 + 48\sqrt{2}}{17}.$$

Oppgave 3

Det enkleste er nok å ha x-integralet innerst. Volumet av trauet blir

$$V_{\text{fullt}} = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{3} dx\,dz\,dy = 3\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = 6-2 = 4.$$

Vannflaten med trauet på skrå får ligning $z = x/3$, eller $x = 3z$. Vannet som har rent ut svarer til det som er over denne flaten, altså $z > x/3$ eller $x < 3z$. Dermed er volumet av vannet som er rent ut lik

$$V_{\text{tapt}} = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{3z} dx\,dz\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} 3z\,dz\,dy = \tfrac{3}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^4)\,dy = 3\Big(1-\frac{1}{5}\Big) = \frac{12}{5}.$$

Andelen som har rent ut, er altså

$$\frac{V_{\text{tapt}}}{V_{\text{fullt}}} = \frac{3}{5}.$$

Oppgave 4

a) Vi finner $\operatorname{div}\mathbf{G} = -y$ og $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 3x\,\mathbf{k}.$

b) Direkte derivasjon gir

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = (2+\cos\psi)(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

Vi kan uttrykke $\mathbf{G}$ på S ved å sette inn parametriseringen:

$$\mathbf{G}\big(\mathbf{r}(\theta,\psi)\big) = (2+\cos\psi)^2\cos\theta\,(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

I begge disse utregningene har vi passet på å sette felles faktorer utenfor en parentes. Vektorene som står igjen innenfor parentesen er de samme, og $\mathbf{G}$ er dermed parallell med $\partial\mathbf{r}/\partial\theta$. Siden $\partial\mathbf{r}/\partial\theta$ er en tangentvektor til S, må den stå normalt på normalvektoren $\mathbf{n}$. (Dette kan man også se fra formlene $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ og $\mathbf{N} = \partial\mathbf{r}/\partial\theta \times \partial\mathbf{r}/\partial\psi$.) Siden $\mathbf{G}$ er parallell med $\partial\mathbf{r}/\partial\theta$ står også den normalt på $\mathbf{n}$, det vil si $\mathbf{G}\cdot\mathbf{n} = 0$.

c) Resultatene vi har vist så langt gir, sammen med divergensteoremet, at

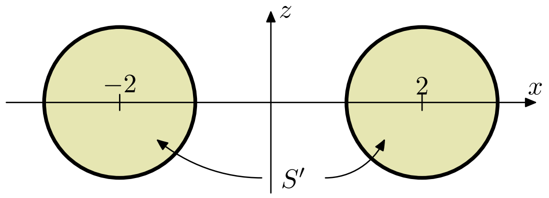
$$\iiint_T y\,dV = -\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{G}\,dV = -\Big(\iint_S \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S'} \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS\Big) = -\iint_{S'} \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

hvor S' er de to plane delene av overflaten til T. Integralet over S blir null fordi $\mathbf{G}\cdot\mathbf{n} = 0$ på S.

Randen til den krumme delen av overflaten til T er gitt ved $\theta = 0$ og $\theta = \pi$. Setter vi inn, får vi

$$\mathbf{r}(0,\psi) = (2+\cos\psi)\,\mathbf{i} + \sin\psi\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(\pi,\psi) = -(2+\cos\psi)\,\mathbf{i} + \sin\psi\,\mathbf{k}.$$

Dette er to sirkler i xz-planet ($y = 0$) med radius 1 og sentrum i $x = \pm 2$, $z = 0$. De danner randen til den plane delen av overflaten til T.



Den plane delen S' av overflaten til T er altså de to sirkelskivene $(x \mp 2)^2 + z^2 \le 1$, $y = 0$. Enhetsnormalen på S' blir $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$. Vi har altså

$$\iiint_T y\,dV = -\iint_{S'} \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S'} \mathbf{G}\cdot\mathbf{j}\,dS = \iint_{S'} x^2\,dS.$$

Ved symmetri er integralet over de to sirkelskivene i S' lik hverandre, så man kunne godt nøyd seg med å integrere over den ene og gange med 2.

En annen måte å forstå parametriseringen av S på, er å merke seg at θ blir den samme vinkelen som opptrer i definisjonen av sylinderkoordinater. Med

$$r = (2+\cos\psi), \quad z = \sin\psi, \qquad 0 \le \psi \le 2\pi$$

har vi uttrykt flaten i sylinderkoordinater. Vi ser at dette parametriserer sirkelen $(r-2)^2 + z^2 = 1$ i rz-planet, som så dreies gjennom en halv omdreining om z-aksen ved å variere θ fra 0 til π.

Oppgave 5

a) Med $P = e^{y^2-x^2}\cos 2xy$ og $Q = e^{y^2-x^2}\sin 2xy$ finner vi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{y^2-x^2}(-2x\sin 2xy + 2y\cos 2xy) - e^{y^2-x^2}(2y\cos 2xy - 2x\sin 2xy) = 0.$$

Siden C er randkurven til et område R, følger det av Greens teorem at

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = 0.$$

b) Parametriserer vi de tre rette linjestykkene i C med henholdsvis $(x,y) = (x,0)$ for den horisontale siden, $(x,y) = (a,y)$ for den vertikale siden og $(x,y) = (x,x)$ for den skrå siden, får vi

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \int_0^a e^{-x^2}\,dx + \int_0^a e^{y^2-a^2}\sin 2ay\,dy - \int_0^a (\cos 2x^2 + \sin 2x^2)\,dx$$

med minustegn foran det siste integralet fordi den valgte parametriseringen går i feil retning på den skrå siden. Vi har brukt $dx = 0$ for den vertikale siden og $dy = dx$ for den skrå siden. Fra punkt **a** vet vi at integralet rundt C er null, så vi har

$$\int_0^a (\cos 2x^2 + \sin 2x^2)\,dx = \int_0^a e^{-x^2}\,dx + \int_0^a e^{y^2-a^2}\sin 2ay\,dy.$$

Lar vi så $a \to \infty$ og benytter de oppgitte formlene, får vi

$$\int_0^\infty (\cos 2x^2 + \sin 2x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Merknad for de nysgjerrige: En tilsvarende regning med utgangspunkt i

$$\oint_C e^{y^2-x^2}\sin 2xy\,dx - e^{y^2-x^2}\cos 2xy\,dy$$

leder til $\int_0^\infty (\sin 2x^2 - \cos 2x^2)\,dx = 0$. I kombinasjon med det vi fant i oppgaven ender vi med

$$\int_0^\infty \sin 2x^2\,dx = \int_0^\infty \cos 2x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Mer generelt er integralene $\int_x^\infty \sin t^2\,dt$ og $\int_x^\infty \cos t^2\,dt$ kjent som *Fresnelintegraler*. De har en tendes til å dukke opp i mange slags anvendelser.