Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 73 59 35 48
Harald Hanche-Olsen tlf. 73 59 35 25

EKSAMEN I SIF5005 MATEMATIKK 2

Bokmål
lørdag 9. august 2003
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 1. september 2003

Når ikke annet er sagt, skal alle svar begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 En humle i flukt har posisjonsvektor

$$\mathbf{r}(t) = \cos(2t)\,\mathbf{i} + \sin(2t)\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

ved tidspunkt t for $0 \le t \le 2\pi$.

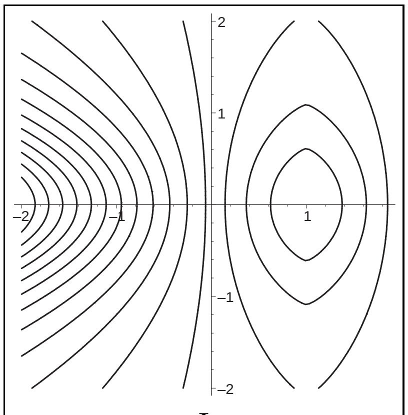
a) Skissér humlens bane C for $0 \le t \le 2\pi$.
Vis at akselerasjonsvektoren står normalt på hastighetsvektoren langs C.

b) Er krumningsradien til C i punktet $(-1, 0, \frac{1}{2}\pi)$ større enn 1, lik 1, eller mindre enn 1?

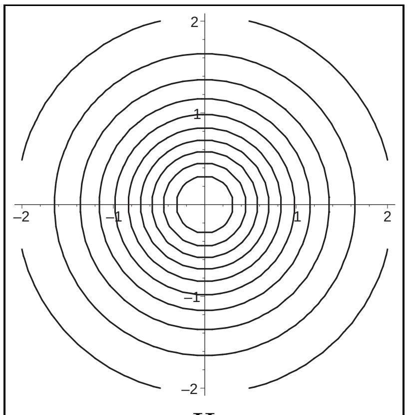
Oppgave 2 På neste side har vi gitt nivåkurvene til fire funksjoner sammen med gradientfelter for tre av dem. I tillegg er to av funksjonene gitt.

Kopiér tabellen under på besvarelsen din og fyll ut med de tilhørende funksjonene og vektorfeltene. Sett et kryss hvis gradientfeltet eller funksjonen ikke er med. Svaret skal ikke begrunnes.

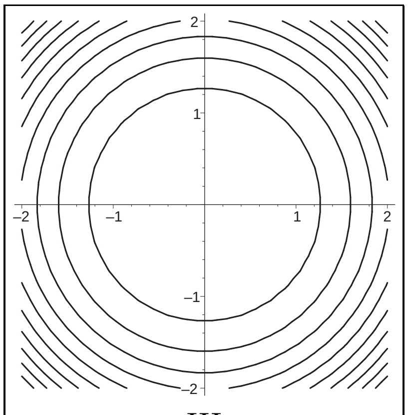
Nivåkurver	Gradientfelt	Funksjonsuttrykk
I		
II		
III		
IV		



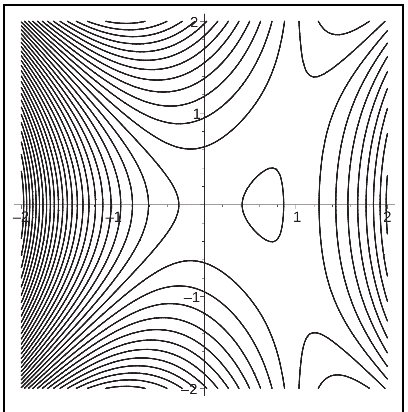
I



II



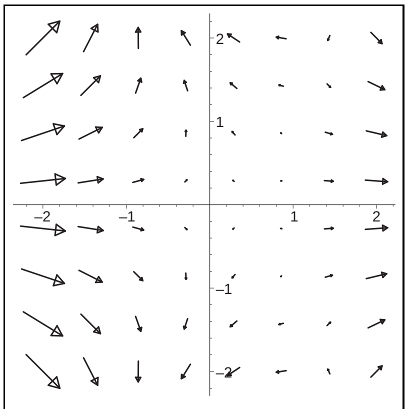
III



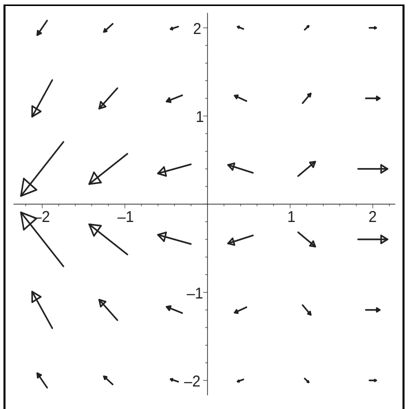
IV

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2}$$

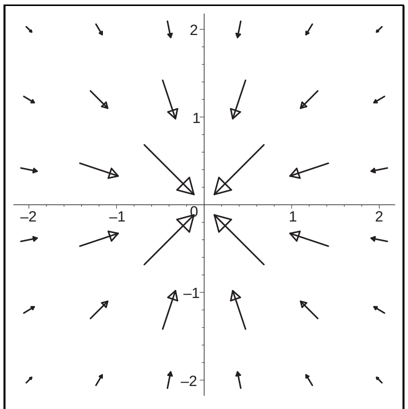
$$g(x,y) = x^3 - x^2 - xy^2 + y^2$$



A



B



C

Oppgave 3 Vis at

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

er et konservativt vektorfelt.

Finn et uttrykk uten integraltegn for funksjonen f gitt ved

$$f(a, b, c) = \int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds,$$

og beregn spesielt funksjonsverdien for f i punktet $(1, 0, 1)$.

Oppgave 4 La flaten S være gitt ved

$$\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + \left(\arctan \frac{u}{v}\right)\mathbf{k} \qquad \text{for } u^2 + v^2 \leq 9.$$

a) Vis at det fundamentale vektorproduktet $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ er vektoren

$$-\frac{v}{u^2 + v^2}\,\mathbf{i} + \frac{u}{u^2 + v^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Beregn arealet av S.

b) Finn en ligning for tangentplanet til S i punktet $(\sqrt{3},\ 1,\ \frac{1}{3}\pi)$.

Oppgave 5 Valutakursen $f(x, y, z)$ i Langtvekkistan er avhengig av de tre parametrene x, y og z som endrer seg med tiden:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{xy} + \frac{y}{z} + \ln z.$$

Klokken 11 en glohet tirsdag er

$x = 200$ og x øker med 1 enhet per time, og

$y = 100$ og y avtar med $\frac{1}{2}$ enhet per time, og

$z = 400$ og z øker med $\frac{1}{2}$ enhet per time.

Avgjør om valutakursen stiger eller synker i dette øyeblikket.

Oppgave 6 La T være legemet avgrenset av de to flatene

$$S_1: \quad z = x^2 + 3y^2 \quad \text{og} \quad S_2: \quad z = 9 - 3x^2 - y^2,$$

og la

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

a) Finn massen til T når massetettheten er $\delta(x, y, z) = x^2$.

b) La D_1 være den delen av overflaten til T som ligger på S_1, og la D_2 være den delen av overflaten til T som ligger på S_2. Beregn

$$\iint_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

når det er kjent at

$$\iint_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{2187\pi}{256}$$

og $\mathbf{n}$ er den utadrettede enhetsnormalen til overflaten av T.

c) La C være skjæringskurven mellom S_1 og S_2, orientert mot klokken sett ovenfra. Beregn

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ B = f_{xy},\ C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\ \theta,\ z)$: $x = r\ \cos\theta, \quad y = r\ \sin\theta, \quad z = z,$
$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Kulekoordinater $(\rho,\ \varphi,\ \theta)$: $x = \rho\ \sin\varphi\ \cos\theta, \quad y = \rho\ \sin\varphi\ \sin\theta, \quad z = \rho\ \cos\varphi,$
$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint\limits_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$