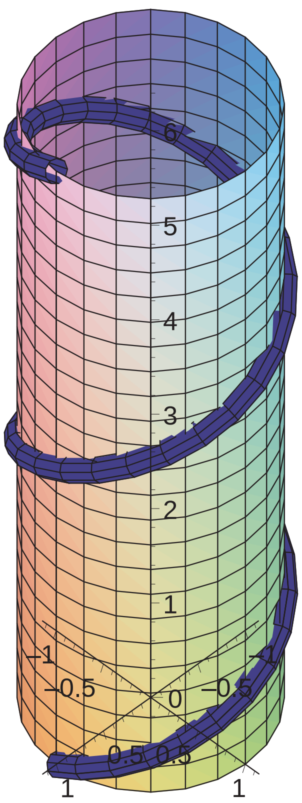
SIF5005 Matematikk 2, 9. august 2003

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Kurven er en spiral som ligger på sylinderen med ligning $x^2 + y^2 = 1$. Spiralen gjør to omdreininger om sylinderen (vinkelen $2t$ vokser fra 0 til 4π) og strekker seg i lengden 2π langs sylinderen (fra $z = 0$ til $z = 2\pi$).

Figuren viser kurven sammen med sylinderen den ligger på.



Hastighetsvektoren er $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\sin(2t)\,\mathbf{i} + 2\cos(2t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Farten (lengden av hastighetsvektoren) er $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}$, altså konstant. Derivasjon av ligningen $|\mathbf{v}|^2 = 5$ gir $2\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 0$, der $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$ er akselerasjonsvektoren. Altså er akselerasjonsvektoren normalt på hastighetsvektoren. (Dette kunne vi selvsagt også sett ved å regne ut $\mathbf{a}$ og beregne prikkproduktet.)

b) Om kurven hadde vært en sirkel på tvers av aksens retning i sylinderen, ville krumningsradien vært 1. Siden den ligger på skrå, må krumningsradien være større.

Vi kan selvsagt også regne ut dette: Bruk formelen for dekomponering av akselerasjonsvektoren fra formellisten. I dette tilfellet er $v^2(t) = 5$ og $v'(t) = 0$. Spesielt, siden $|\mathbf{N}(t)| = 1$ kan vi ta lengden av hver side i formelen og få $|\mathbf{a}(t)| = 5\kappa(t)$. Direkte utregning gir $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -4\cos(2t) - 4\sin(2t)$, så $|\mathbf{a}(t)| = 4$. Dermed blir $\kappa(t) = 4/5$, og krumningsradien i ethvert punkt på kurven blir $1/\kappa(t) = 5/4 > 1$.

Oppgave 2

Nivåkurver	Gradientfelt	Funksjonsuttrykk
I	B	X
II	C	X
III	X	f
IV	A	g

Oppgave 3

Utregning viser at $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, og siden $\mathbf{F}$ er definert overalt følger at vektorfeltet er konservativt. (Vi kunne godt hoppe over dette argumentet, siden utregningen nedenfor viser det samme.)

Den søkte funksjonen f må oppfylle $\nabla f = \mathbf{F}$, altså

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3.$$

Dette gir

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + c_1(y,z), \quad f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}y^2 + c_2(x,z), \quad f(x,y,z) = 3z + c_3(x,y)$$

for funksjoner ("integrasjonskonstanter") c_1, c_2 og c_3. Vi ser at

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 + 3z$$

oppfyller disse ligningene. Funksjonen oppfyller også $f(0,0,0) = 0$, og må derfor være den søkte funksjonen. (Med bokstavvalget i oppgaven skulle vi kanskje skrive dette $f(a,b,c) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + 3c$.) Spesielt er $f(1,0,1) = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Direkte utregning viser at $\nabla f = \mathbf{F}$, så $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt. Som antydet ovenfor hadde vi altså ikke trengt å regne ut at $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Oppgave 4

a) Direkte utregning (med litt forenkling underveis, ikke vist her) gir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \frac{v}{u^2+v^2}\mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} - \frac{u}{u^2+v^2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -\frac{v}{u^2+v^2}\mathbf{i} + \frac{u}{u^2+v^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Videre blir

$$|\mathbf{N}|^2 = \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + 1 = \frac{1}{u^2+v^2} + 1 = \frac{1+u^2+v^2}{u^2+v^2},$$

slik at arealet av S blir

$$\begin{aligned}
\operatorname{areal}(S) &= \iint\limits_{u^2+v^2\le 9} |\mathbf{N}(u,v)|\,du\,dv = \iint\limits_{u^2+v^2\le 9} \sqrt{\frac{1+u^2+v^2}{u^2+v^2}}\,du\,dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{\frac{1+r^2}{r^2}}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^3 \sqrt{1+r^2}\,dr \\
&= 2\pi\Big[\tfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \tfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big]_0^3 = \pi\big(3\sqrt{10} + \ln(3+\sqrt{10})\big).
\end{aligned}$$

b) Punktet $(\sqrt{3}, 1, \frac{1}{3}\pi)$ er $\mathbf{r}(\sqrt{3}, 1)$. En normalvektor i dette punktet er

$$\mathbf{N}(\sqrt{3}, 1) = -\tfrac{1}{4}\,\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

En ligning for tangentplanet i dette punktet blir da

$$-\tfrac{1}{4}(x - \sqrt{3}) + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}(y - 1) + (z - \tfrac{1}{3}\pi) = 0,$$

som det kanskje passer å skrive som

$$-x + \sqrt{3}y + 4z = \tfrac{4}{3}\pi.$$

Oppgave 5

Ved kjerneregelen blir den tidsderiverte av valutakursen

$$\frac{d}{dt}f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{x^2 y}\frac{dx}{dt} + \Bigl(-\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{z}\Bigr)\frac{dy}{dt} + \Bigl(-\frac{y}{z^2} + \frac{1}{z}\Bigr)\frac{dz}{dt}.$$

Vi setter inn de gitte tallene, og får

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= -\frac{1}{200^2\cdot 100}\cdot 1 + \Bigl(-\frac{1}{200\cdot 100^2} + \frac{1}{400}\Bigr)\cdot\Bigl(-\frac{1}{2}\Bigr) + \Bigl(-\frac{100}{400^2} + \frac{1}{400}\Bigr)\cdot\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4\,000\,000} + \frac{1}{4\,000\,000} - \frac{1}{800} - \frac{1}{3200} + \frac{1}{800} = -\frac{1}{3200} < 0,\end{aligned}$$

så valutakursen avtar i øyeblikket.

Oppgave 6

Vi starter med å bestemme skjæringskurven mellom de to flatene S_1 og S_2. På skjæringskurven er $x^2 + 3y^2 = 9 - 3x^2 - y^2$, altså $4x^2 + 4y^2 = 9$. Projeksjonen av skjæringskurven i xy-planet er altså sirkelen med sentrum i origo og radius $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$. Projeksjonen av T blir den tilhørende sirkelskiven. Nedenfor kaller vi denne sirkelskiven R.

a) Massen av T blir

$$\begin{aligned}m &= \iiint_T \delta(x,y,z)\,dV = \iint_R \int_{x^2+3y^2}^{9-3x^2-y^2} x^2\,dz\,dA = \iint_R (9 - 4x^2 - 4y^2)x^2\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{3/2} (9-4r^2)r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^{3/2}(9r^3 - 4r^5)\,dr \\ &= \pi\Bigl[\tfrac{9}{4}r^4 - \tfrac{4}{6}r^6\Bigr]_0^{3/2} = \frac{3^5}{2^6}\pi = \frac{243\,\pi}{64}.\end{aligned}$$

b) Ettersom D_1 og D_2 tilsammen utgjør hele overflaten til T, kan divergensteoremet skrives

$$\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{D_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

Vi finner $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3x^2$, så integralet på venstre side blir $3m$, og dermed er

$$\iint_{D_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 3\cdot\frac{243\,\pi}{64} - \frac{2187\,\pi}{256} = \frac{729\,\pi}{256}.$$

c) Vi kan bruke Stokes' teorem på D_2 (vi kunne like gjerne brukt D_1):

Utregning gir $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -3\,\mathbf{i}$, og om vi parametriserer D_2 med $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ der $(x,y)\in R$ og $z = 9 - 3x^2 - y^2$ blir

$$\mathbf{N} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = 6x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

så

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_{D_2} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R (-3\mathbf{i})\cdot(6x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dA = -18\iint_R x\,dA = 0$$

siden R er symmetrisk om y-aksen.

Vi kunne faktisk sett dette enda tidligere: $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -3\,\mathbf{i}$ sammen med symmetrien av D_2 om yz-planet er tilstrekkelig til å se at integralet må bli null.

Alternativt kunne vi parametrisert C ved

$$x = \tfrac{3}{2}\cos t, \quad y = \tfrac{3}{2}\sin t, \quad z = x^2 + 3y^2 = \tfrac{9}{4}\cos^2 t + \tfrac{27}{4}\sin^2 t$$

som gir

$$dx = -\tfrac{3}{2}\sin t\,dt, \quad dy = \tfrac{3}{2}\cos t\,dt, \quad dz = 9\sin t\cos t\,dt$$

og dermed

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_0^{2\pi} \big(\tfrac{27}{8}\cos^3 t\,\mathbf{i} + (9\cos^2 t + 27\sin^2 t)\,\mathbf{j} + \tfrac{3}{2}\sin t\big)\cdot\big(-\tfrac{3}{2}\sin t\,\mathbf{i} + \tfrac{3}{2}\cos t\,\mathbf{j} + 9\sin t\cos t\,\mathbf{k}\big)\,dt$$

som blir null fordi alle produktene i skalarproduktet involverer en odde potens av enten $\cos t$ eller $\sin t$. (Om du ikke er kjent med dette symmetriargumentet, er det en overkommelig oppgave, om enn noe arbeidskrevende, å regne ut alle integralene og få null i hvert tilfelle.)