**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**

# Løsningsforslag til eksamen i TMA4105 matematikk 2, 19.05.2004

**Oppgave 1** La $f(x, y, z) = xy^2 + \arctan(xz)$. La $P_0$ være punktet $(1, 1, -1)$.

**a)** Finn gradienten til $f$ i $P_0$.

**b)** La $S$ være den av nivåflatene til $f$ som går gjennom punktet $P_0$. Finn en ligning for $S$ og en ligning for tangentplanet til $S$ i $P_0$.

*Løsning.* **a)** Partiell derivasjon gir, vha. kjerneregelen og formelen $\frac{d}{du}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2}$, at

$$\begin{aligned} f_x &= y^2 + \frac{1}{1+(xz)^2} z, \\ f_y &= 2xy, \\ f_z &= \frac{1}{1+(xz)^2} x. \end{aligned}$$

Innsatt $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ gir dette svaret:

$$\underline{\underline{\nabla f(1, 1, -1) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}}}.$$

**b)** Ligningen for $S$ er $f(x, y, z) = f(1, 1, -1)$, dvs.

$$\underline{\underline{xy^2 + \arctan(xz) = 1 - \frac{\pi}{4}}},$$

siden $f(1, 1, -1) = 1 + \arctan(-1)$ og $\arctan(-1) = -\arctan(1) = -\pi/4$.

Ligningen for tangentplanet til $S$ i $P_0$ er gitt ved:

$$\nabla f(1, 1, -1) \cdot ([x, y, z] - [1, 1, -1]) = 0$$

dvs. $[1/2, 2, 1/2] \cdot [x - 1, y - 1, z + 1] = 0$, som gir oss

$$\frac{1}{2}(x - 1) + 2(y - 1) + \frac{1}{2}(z + 1) = 0.$$

Dette er svar godt nok, men det blir penere hvis vi ganger med 2 og rydder opp:

$$\underline{\underline{x + 4y + z = 4}}.$$

□

**Oppgave 2** Finn og klassifiser de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Har $f$ absolutte (dvs. globale) maksimums- og minimumsverdier? (Husk å begrunne svaret.)

*Løsning.* Partiell derivasjon med produkt- og kjerneregel gir

$$\begin{aligned} f_x &= e^{-(x^2+y^2)/2} + xe^{-(x^2+y^2)/2}(-x) = (1-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ f_y &= -xye^{-(x^2+y^2)/2}, \end{aligned}$$

og for å finne de kritiske punktene løser vi ligningssettet $\{f_x = 0, f_y = 0\}$, dvs.

$$\begin{aligned} (1-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} &= 0, \\ -xye^{-(x^2+y^2)/2} &= 0. \end{aligned}$$

Faktoren $e^{-(x^2+y^2)/2}$ kan strykes, siden den alltid er positiv, så vi får

$$1 - x^2 = 0 \quad \text{og} \quad xy = 0.$$

Den første ligningen gir $x^2 = 1$ og derfor $x = \pm 1$. Den andre ligningen gir da $y = 0$. Altså er det to kritiske punkter:

$$\underline{\underline{(1,0) \quad \text{og} \quad (-1,0)}}.$$

Vi bruker annenderiverttesten med

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

for å klassifisere disse punktene. Derivasjon gir

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left[-2x + (1-x^2)(-x)\right] e^{-(x^2+y^2)/2} = x[x^2-3]e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ f_{xy} &= f_{yx} = (1-x^2)(-y)e^{-(x^2+y^2)/2} = y(x^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ f_{yy} &= [-x - xy(-y)]\, e^{-(x^2+y^2)/2} = x(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2}. \end{aligned}$$

I punktet $(1,0)$ har vi da

$$f_{xx}(1,0) = -2e^{-1/2}, \quad f_{xy}(1,0) = 0, \quad f_{yy}(1,0) = -e^{-1/2},$$

og derfor $\Delta = 2e^{-1} > 0$. Dessuten er $f_{xx}(1,0) < 0$, så

$$\underline{\underline{(1,0) \text{ er et } \textit{lokalt maksimumspunkt}}}.$$

I punktet $(-1,0)$ har vi

$$f_{xx}(-1,0) = 2e^{-1/2}, \quad f_{xy}(-1,0) = 0, \quad f_{yy}(-1,0) = e^{-1/2},$$

og derfor $\Delta = 2e^{-1} > 0$. Dessuten er $f_{xx}(-1,0) > 0$, så

$$\underline{\underline{(-1,0) \text{ er et } \textit{lokalt minimumspunkt}}}.$$

Svaret på det siste spørsmålet er ***ja***; punktet $(1,0)$ er et absolutt maksimumspunkt, og $(-1,0)$ er et absolutt minimumspunkt. Begrunnelsen er som følger. Merk at

$$f(\pm 1, 0) = \pm e^{-1/2},$$

Det vi må vise er derfor at

$$(*) \qquad -e^{-1/2} \le f(x,y) \le e^{-1/2} \quad \text{for alle } x \text{ og } y.$$

Men $f(x,y) \to 0$ når $|(x,y)| \to +\infty$ (se separat begrunnelse nedenfor). Ved å velge $R$ tilstrekkelig stor, kan vi derfor garantere at

$$(**) \qquad |f(x,y)| < e^{-1/2} \quad \text{når} \quad |(x,y)| \ge R,$$

og da er selvsagt $(*)$ tilfredsstilt.

Det gjenstår da kun å vise at $(*)$ er oppfylt når $|(x,y)| < R$. Men siden $f$ er kontinuerlig, vet vi fra en setning i boka at i den lukkede sirkeldisken $D_R$ gitt ved $x^2 + y^2 \le R^2$ har $f$ absolutte ekstremalpunkter; pga. $(**)$ må disse punktene ligge i det indre av $D_R$, og de må følgelig være kritiske punkter for $f$. Disse punktene kan derfor ikke være noe annet enn $(\pm 1, 0)$, og det følger da at $(*)$ er oppfylt også for $|(x,y)| < R$.

La oss til slutt begrunne at $f(x,y) \to 0$ når $|(x,y)| \to +\infty$. I polarkoordinater $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ (med $r \ge 0$) har vi

$$|f(x,y)| = (r\cos\theta)e^{-r^2/2} \le re^{-r^2/2}$$

og fra L'Hopitals regel ser vi at

$$\lim_{r\to+\infty} re^{-r^2/2} = 0.$$

$\square$

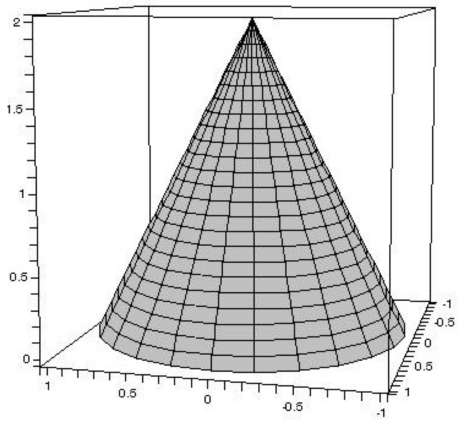
**Oppgave 3** La $S$ være flaten bestemt ved

$$z = 2 - 2\sqrt{x^2+y^2}, \qquad z \ge 0.$$

Skisser $S$, og beregn fluksen opp gjennom $S$ av vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y^2)\mathbf{i} + (3x^2y + y^3 - x^3)\mathbf{j} + (z+1)\mathbf{k}.$$

*Løsning.* $S$ er den delen av kjegleflaten $z = 2 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ som ligger over $xy$-planet. Den er en omdreiningsflate med $z$-aksen som rotasjonsakse, og fremkommer f.eks. ved å rotere det rette linjestykket gitt i $xz$-planet ved $z = 2 - 2x$ for $0 \le x \le 1$, rundt $z$-aksen.




Betingelsen $z \geq 0$ gir $2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, dvs. $x^2 + y^2 \leq 1$. Definer området

$$R : x^2 + y^2 \leq 1.$$

$R$ er altså projeksjonen av $S$ ned i $xy$-planet.

Vi skal nå regne ut fluksintegralet

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

der det er spesifisert at normalen $\mathbf{n}$ skal ha *positiv* $\mathbf{k}$-komponent.

**Alternativ 1.** Divergensteoremet gir

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \underbrace{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS}_{=I} + \underbrace{\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS}_{=I_1},$$

hvor $T$ er det tredimensjonale området som ligger under $S$ og over $xy$-planet. Overflaten til $T$ består av to deler: $S$ og "bunnen" $S_1$. Normalvektoren $\mathbf{n}$ peker ut av $T$.

$T$ er altså en rett sirkulær kjegle med grunnflate $S_1 = R$, og er gitt ved

$$T : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 2 - 2r, \end{cases}$$

i polarkoordinater. Utregning gir

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 2 + 3(x^2 + y^2).$$

Derfor er

$$\begin{aligned} \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{(2-2r)} (2 + 3r^2) dz\, r dr\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 (2 - 2r)(2 + 3r^2) r\, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (4r - 4r^2 + 6r^3 - 6r^4)\, dr = 2\pi \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{6}{4} - \frac{6}{5}\right) = \frac{29\pi}{15}. \end{aligned}$$

Vi regner nå ut $I_1 = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$. Siden $S_1 = R$ er et område i $xy$-planet, og er bunnen i $T$, må $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ på $S_1$, mens $dS = dx\,dy$. Følgelig er

$$I_1 = \iint_R \underbrace{\mathbf{F}(x,y,0)\cdot(-\mathbf{k})}_{=-1}\,dx\,dy = -\mathrm{Areal}(R) = -\pi.$$

Vi konkluderer at

$$I = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV - I_1 = \frac{29\pi}{15} + \pi = \underline{\underline{\frac{44\pi}{15}}}.$$

**Alternativ 2.** Direkte utregning av $I$. Sett

$$f(x,y) = 2 - 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Da er $S$ er gitt som en graf $z = f(x,y)$ over området $R$ (definert over), så

$$\mathbf{n}\,dS = [-f_x, -f_y, 1]\;dx\,dy.$$

(Merk at $n$ har positiv $\mathbf{k}$-komponent, som ønsket.) Utregning gir

$$f_x = -\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = -\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

slik at

$$\mathbf{n}\,dS = \left(\frac{2x\mathbf{i}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathbf{k}\right)\,dx\,dy.$$

Derfor er

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_R \mathbf{F}\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\left(\frac{2x\mathbf{i}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathbf{k}\right)\,dx\,dy \\
&= \iint_R \big((x+y^2)\mathbf{i} + (3x^2y+y^3-x^3)\mathbf{j} + \big(f(x,y)+1\big)\mathbf{k}\big)\cdot\left(\frac{2x\mathbf{i}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathbf{k}\right)\,dx\,dy \\
&= \iint_R \left(\frac{2x(x+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y(3x^2y+y^3-x^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \big(3 - 2\sqrt{x^2+y^2}\big)\right)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Dette er greit å regne ut, men ikke særlig morsomt. I polarkoordinater har vi

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big[2(\cos\theta)(r\cos\theta + r^2\sin^2\theta) \\
&\qquad + 2(\sin\theta)(3r^3\cos^2\theta\sin\theta + r^3\sin^3\theta - r^3\cos^3\theta) + (3-2r)\Big]\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[(2\cos^2\theta)\frac{r^3}{3} + (2\sin^2\theta\cos\theta)\frac{r^4}{4} \\
&\qquad + \big(6\cos^2\theta\sin^2\theta + 2\sin^4\theta - 2\cos^3\theta\sin\theta\big)\,\frac{r^5}{5} + \frac{3}{2}r^2 - \frac{2}{3}r^3\Big]\Big|_{r=0}^{1}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{2}{3}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta + \frac{6}{5}\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{2}{5}\sin^4\theta - \frac{2}{5}\cos^3\theta\sin\theta + \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\Big]\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{2}{3}\cos^2\theta + \frac{1}{6}\frac{d}{d\theta}(\sin^3\theta) + \frac{6}{5}(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta + \frac{2}{5}\sin^4\theta + \frac{1}{10}\frac{d}{d\theta}(\cos^4\theta)\Big]\,d\theta \\
&\quad + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)2\pi \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{2}{3}\cos^2\theta + \frac{6}{5}\sin^2\theta - \frac{4}{5}\sin^4\theta\Big]\,d\theta + \underbrace{\frac{1}{6}(\sin^3\theta)\big|_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{10}(\cos^4\theta)\big|_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{5\pi}{3} \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{2}{3} + \frac{8}{15}\sin^2\theta - \frac{4}{5}\sin^4\theta\Big]\,d\theta + \frac{5\pi}{3} \\
&= \frac{4\pi}{3} + \int_0^{2\pi}\Big[\frac{4}{15}(1-\cos 2\theta) - \frac{4}{5}\sin^4\theta\Big]\,d\theta + \frac{5\pi}{3} \\
&= \frac{4\pi}{3} + \frac{4}{15}(2\pi) - \frac{4}{5}\cdot\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{44\pi}{15}}}.
\end{aligned}
$$

Her brukte vi

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}\,(1-\cos 2\theta)\,,$$

som følger fra $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$. (Tilsvarende har vi $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\,(1+\cos 2\theta)$.) Kvadrering gir

$$\sin^4\theta = \frac{1}{4}\,\big(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2\theta\big) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\cos 2\theta,$$

som viser at

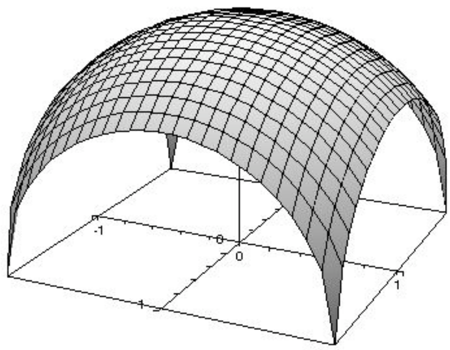
$$\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\,d\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

(Denne ble brukt over.) □

**Oppgave 4** La $S$ være kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

**a)** La $A$ betegne arealet av den delen av $S$ som ligger over planet $z = 1$. Uttrykk $A$ som et iterert dobbeltintegral, og vis ved å løse dette integralet at $A = \left(4 - 2\sqrt{2}\right)\pi$.

**b)** Bestem arealet av den delen av $S$ som ligger over kvadratet $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ (se figur). (*Hint:* Dersom du benytter svaret fra punkt (a), kan oppgaven løses uten integrasjon. Dersom du velger å løse oppgaven ved integrasjon, kan du få bruk for at $\int_0^1 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\right) dx = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$)



*Løsning.* **a)** Den øvre hemisfæren av den gitte kuleflaten kan parametriseres som en graf $z = f(x,y)$ der

$$f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

$S$ er den delen hvor $z \ge 1$, dvs.

$$\sqrt{2 - x^2 - y^2} \ge 1 \iff x^2 + y^2 \le 1.$$

Vi lar $R$ være området i $xy$-planet gitt ved

$$R : x^2 + y^2 \le 1$$

Da er altså $S$ grafen $z = f(x,y)$ over $R$. Vi har

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

Utregning gir

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}},$$

slik at

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{2 - x^2 - y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}$$

Følgelig er

$$A = \iint_S dS = \iint_R \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

For å løse dette integralet, er det best å bruke polarkoordinater:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - r^2}}\, r dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - u}} \frac{du}{2}\, d\theta = (2\pi)\sqrt{2}\left(-\sqrt{2 - u}\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi = \underline{\underline{\left(4 - 2\sqrt{2}\right)\pi}},$$

der vi brukte substitusjonen $u = r^2$.

**b)** La $\widetilde{S}$ betegne flaten hvis areal skal regnes ut.

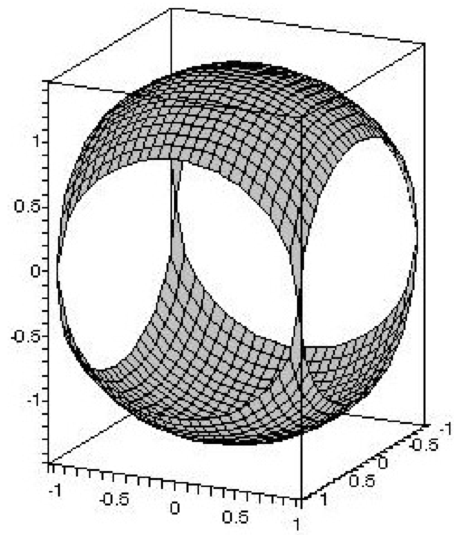
**Alternativ 1.** Uten integrasjon. Idéen er som følger: Start med hele kuleflaten (med radius $\sqrt{2}$), som har areal

$$A_0 = 4\pi(\sqrt{2})^2 = 8\pi.$$

La $S_1$ være den delen av kuleflaten hvor $x \geq 1$, $S_2$ den delen hvor $x \leq -1$, $S_3$ den delen hvor $y \geq 1$ og $S_4$ den delen hvor $y \leq -1$. Hver av disse "kalottene" er formlike med flaten $S$ fra punkt (a), så de har alle areal lik $A$.

Tenk deg nå at vi starter med hele kuleflaten, og så kapper vi av flatene $S_1, S_2, S_3$ og $S_4$. Vi står da igjen med en flate $\hat{S}$ (se figur under) med areal

$$\hat{A} = A_0 - 4A = 8\pi - 4\left(4 - 2\sqrt{2}\right)\pi = 8\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi.$$




Men flaten $\widetilde{S}$ er åpenbart ikke annet en den øvre halvdelen av $\hat{S}$ (dvs. den delen som ligger over $xy$-planet). Følgelig er arealet som søkes lik

$$\frac{\hat{A}}{2} = \underline{\underline{4\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi}}.$$

**Alternativ 2.** Integrasjon. Merk at flaten $\widetilde{S}$ er grafen $z = f(x, y)$ over kvadratet $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Vi har derfor

$$\text{Areal}(\widetilde{S}) = \iint_{\widetilde{S}} dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = 4\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

Fra Rottmann har vi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

for $a > 0$ og $-a \leq x \leq a$. Vi bruker denne formelen med $a = \sqrt{2 - y^2}$, hvilket gir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Areal}(\widetilde{S}) &= 4\sqrt{2} \int_0^1 \left( \arcsin \frac{x}{\sqrt{2 - y^2}} \right) \Bigg|_0^1 \, dy \\
&= 4\sqrt{2} \int_0^1 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 - y^2}} \, dy \\
&= 4\sqrt{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \pi = \underline{\underline{4\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi}},
\end{aligned}$$

hvor vi brukte siste del av hintet. $\square$

**Oppgave 5** Betrakt vektorfeltene

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(x, y, z) &= (1 + x)e^{x+y}\mathbf{i} + xe^{x+y}\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}, \\
\mathbf{G}(x, y, z) &= (1 + x)e^{x+y}\mathbf{i} + xe^{x+y}\mathbf{j} - 2y\mathbf{k} = \mathbf{F}(x, y, z) + 2(z - y)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

**a)** Bestem en funksjon $f(x, y, z)$ slik at $\nabla f = \mathbf{F}$.

**b)** Beregn $\int_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \, ds$ langs den orienterte kurven $C$ gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)e^t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

*Løsning.* **a)** Ligningen $\nabla f = \mathbf{F}$ skrevet komponentvis gir:

$$f_x = (1 + x)e^{x+y}, \tag{1}$$

$$f_y = xe^{x+y}, \tag{2}$$

$$f_z = -2z. \tag{3}$$

Integrasjon av (2) mhp. $y$ gir

$$f = xe^{x+y} + C(x, z). \tag{4}$$

Dette medfører (partiell derivasjon mhp. $x$)

$$f_x = (1 + x)e^{x+y} + \frac{\partial C}{\partial x}(x, z)$$

og sammenligner vi dette med (1), ser vi at

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x, z) = 0 \implies C = C(z).$$

Partiellderivasjon av (4) mhp. $z$, og sammenligning med (3), gir da

$$f_z = C'(z) = -2z \implies C(z) = -z^2 + K \qquad (K \text{ konstant})$$

men vi kan like godt ta $K = 0$. Konklusjonen er at $\nabla f = \mathbf{F}$ med

$$\underline{\underline{f(x, y, z) = xe^{x+y} - z^2.}}$$

**b)** Trikset her er å bruke (i) at $\mathbf{G} = \mathbf{F} + 2(z-y)\mathbf{k}$ og (ii) at $\mathbf{F}$ er et gradientfelt (fra pkt. a)). (Det er håpløst å regne ut integralet direkte.) Altså er

$$\int_C \mathbf{G}\cdot\mathbf{T}\,ds = \underbrace{\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds}_{=I} + \underbrace{\int_C 2(z-y)\mathbf{k}\cdot\mathbf{T}\,ds}_{=II}.$$

Men

$$I = f\big(\mathbf{r}(1)\big) - f\big(\mathbf{r}(0)\big) = f(0,1,2) - f(1,0,0) = -4 - e,$$

og, med notasjonen $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$,

$$II = \int_C 2(z-y)\,dz = \int_0^1 2\big(z(t)-y(t)\big)z'(t)\,dt = \int_0^1 2(2t-t)2\,dt = \int_0^1 4t\,dt = 2,$$

og følgelig er svaret:

$$\int_C \mathbf{G}\cdot\mathbf{T}\,ds = -4 - e + 2 = \underline{\underline{-2-e}}.$$

□

**Oppgave 6** En orientert kurve $C$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + (1+\sin t)\mathbf{j} + (1-\cos t-\sin t)\mathbf{k} \quad \text{for} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

**a)** Vis at $C$ ligger i et plan, og finn en ligning for dette planet. Hva slags kurve er projeksjonen av $C$ i $xy$-planet?

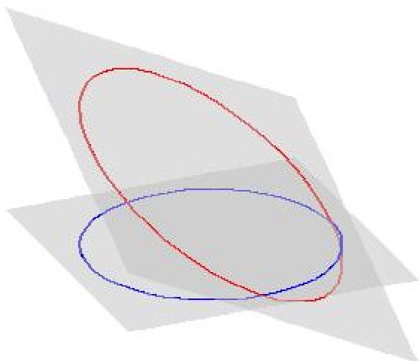
**b)** Bruk Stokes' teorem til å regne ut $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$, der

$$\mathbf{F}(x,y,z) = ye^x\mathbf{i} + (x^2+e^x)\mathbf{j} + z^2e^z\mathbf{k}.$$

*Løsning.* **a)** Vi skriver som vanlig $x(t), y(t)$ og $z(t)$ for komponentfunksjonene til $\mathbf{r}(t)$. Vi ser at

$$x(t) + y(t) + z(t) = 2,$$

så $C$ ligger i planet gitt ved $x+y+z=2$. Projeksjonen i $xy$-planet er kurven parametrisert ved $x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \cos t\mathbf{i} + (1+\sin t)\mathbf{j}$ for $0 \le t \le 2\pi$, og dette er åpenbart en sirkel med sentrum i $(0,1)$ og radius 1. Figuren under viser romkurven $C$ (rød, hvis du har farger) og en del av planet som den ligger i, samt projeksjonen av $C$ i $xy$-planet.



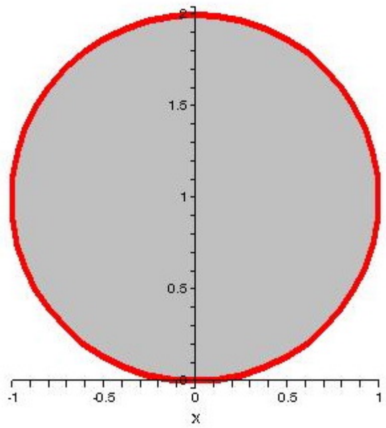
**b)** Stokes' teorem gir

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

der flaten $S$ må velges slik at $C$ er randkurven, og flatenormalen $\mathbf{n}$ må være riktig orientert i henhold til orienteringen av $C$: Vi skal ha at $\mathbf{n}\times\mathbf{T}$ peker inn i $S$, der $\mathbf{T}$ er enhetstangentvektoren langs $C$ med den gitte parametriseringen. (Mindre formelt: Hvis vi går rundt kurven i den gitte omløpsretningen og med hodet i retning $\mathbf{n}$, så skal flaten $S$ ligge på venstre hånd.)

Vi velger den enklest mulige flaten $S$, nemlig den delen av planet $x+y+z=2$ som ligger innenfor $C$ (husk at $C$ ligger i dette planet). $S$ er altså gitt som en graf $z=2-x-y$ over området $R$ som er avgrenset av projeksjonen til $C$ i $xy$-planet, nemlig (se figuren)

$$R : x^2+(y-1)^2 \le 1.$$




Vi har to mulige normalvektorer på $S$, nemlig $\mathbf{n}=\pm(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{3}$. Hvilken av dem velger vi? Vel, sett ovenfra (fra den positive $z$-aksen) er $C$ orientert mot klokken, så $\mathbf{n}$ må ha positiv $\mathbf{k}$-komponent. Vi må altså ta $\mathbf{n}=(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{3}$.

Siden $dS=\sqrt{3}\,dx\,dy$ på $S$ (spesialtilfelle 1), har vi derfor

$$\mathbf{n}\,dS = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dx\,dy$$

på $S$. Vi regner ut

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^x & x^2+e^x & z^2e^z \end{vmatrix} = 2x\mathbf{k}.$$

Konklusjonen er:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_R 2x\,dx\,dy.$$

Siden $R$ er symmetrisk om $y$-aksen, mens integranden $2x$ er en odde funksjon, ser vi at

$$\underline{\underline{\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = 0.}}$$

Alternativt kan vi vise dette ved direkte utregning, f.eks. som følger. Siden (vi antar $r>0$ her)

$$x^2+(y-1)^2 = x^2+y^2-2y+1 = r^2-2r\sin\theta+1 \le 1 \iff r^2 \le 2r\sin\theta \iff r \le 2\sin\theta$$

har vi i polarkoordinater

$$R : 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 2\sin\theta.$$

(Begrensningen $0 \leq \theta \leq \pi$ kommer fordi $R$ ligger i halvplanet $y \geq 0$.) Da har vi

$$\begin{aligned}
\iint_R 2x\,dx\,dy &= \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} (2r\cos\theta)\,r dr\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{2}{3}r^3\right)\Big|_0^{2\sin\theta} (\cos\theta) d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{16}{3}\sin^3\theta\cos\theta d\theta \\
&= \frac{4}{3}\left(\sin^4\theta\right)\Big|_0^\pi = 0.
\end{aligned}$$

□