Kapittel 1

Komplekse tall

De komplekse tallene, $\mathbb{C}$, er et tallmengde som i likhet med negative tall oppsto i forbindelse med løsning av polynomlikninger. Likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

har ingen løsning blant noen av de foregående tallmengdene, og derfor har man kommet til at det er best å definere et helt nytt tall:

Den imaginære enheten i

$$i^2 = -1$$

Det kunne vært fristende å 'løse' likningen $x^2 + 1 = 0$ for x, og definere

$$i = \sqrt{-1}.$$

Men vi må være litt forsiktige med denne strategien. Regneregelen

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

gjelder ikke når både a og b er negative tall. Dette vises av følgende klassiske eksempel:

$$\begin{aligned} 1 &= (-1)\cdot(-1) \\ &= \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \\ &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i^2 = -1. \end{aligned}$$

Men vi skal allikevel tillate oss å bruke det nye tallet i til å skrive kvadratroten av negative tall på en pen måte:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4\cdot(-1)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{(-1)} = \pm 2i.$$

Eksempel 1.1. Løser vi likningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

at

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \qquad \triangle$$

Kartesisk form

Eksemplet over inspirerer oss til å definere

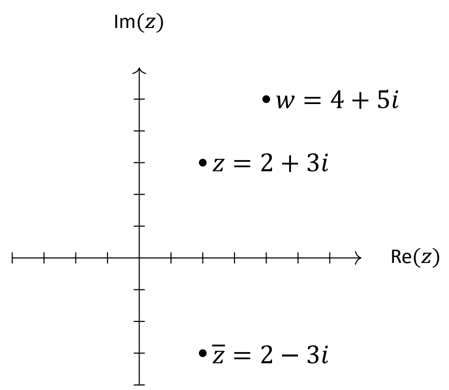
Komplekse tall på kartesisk form

$$z = a + bi$$

Her er a og b reelle tall. De kalles henholdsvis realdelen og imaginærdelen til z, og skrives gjerne $\mathrm{Re}(z)$ og $\mathrm{Im}(z)$. Mengden av alle komplekse tall skrives $\mathbb{C}$. De reelle tallene er en delmengde av de komplekse tallene,for dersom $b = 0$, er z reell:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Et komplekst tall likner på mange måter en vektor i $\mathbb{R}^2$. Vi kan tenke at realdelen a og imaginærdelen b er komponenter i en vektor, og avmerke z i det komplekse planet.



Det komplekse planet

La $z = a + bi$ og $w = c + di$ være komplekse tall. Regneregler for komplekse tall følger regnereglene for reelle tall, men du må huske at $i^2 = -1$. Vi ganger sammen komplekse tall slik:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

og deler dem slik:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di}\cdot\frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Addisjon og subtraksjon er trivielle operasjoner.

Regneregler for kartesisk form

La $z = a + bi$ og $w = c + di$ være komplekse tall. Vi har

$$z + w = a + c + (b + d)i$$
$$z - w = a - c + (b - d)i$$
$$z \cdot w = ac - bd + (bc + ad)i$$
$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Merk at komplekse tall legges sammen komponentvis akkurat som vektorer i $\mathbb{R}^2$. Multiplikasjon og divisjon har ingen tilsvarende operasjoner i $\mathbb{R}^2$ i 'vanlig bruk'.

Eksempel 1.2. La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$.

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i = -7 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{22}{41} + \frac{2}{41}i. \end{aligned}$$ △

Når vi deler et komplekst tall på $z = a + bi$, ganger vi oppe og nede med z konjugert:

$$\overline{z} = a - bi$$

Merk at $z\overline{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall.

Regneregler for konjugert

La $z = a + bi$ og w være komplekse tall. Noen regneregler er:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \qquad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$$
$$z + \overline{z} = 2a \qquad z - \overline{z} = 2bi$$

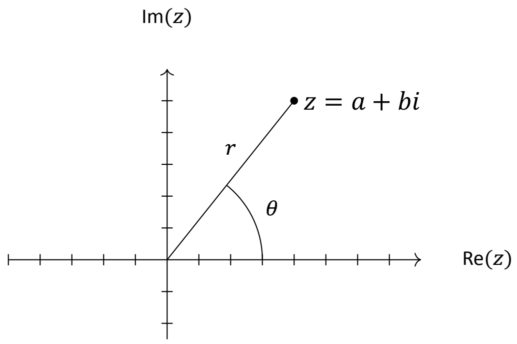
Polare koordinater

Med komplekse tall kan man belyse forholdet mellom eksponensialfunksjonen og de trigonometriske funksjonene. Dette forholdet er ikke mulig å få øye på dersom man kun har reelle tall til rådighet.

La r være avstanden fra det komplekse tallet $z = a + bi$ til origo, og la θ være vinkelen z gjør med den reelle aksen. Noen enkle geometriske betraktninger gir

Den ene veien

$$a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$$
$$b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\theta$$



Polare koordinater

Formlene over gir a og b som funksjon av r og θ. Litt mer trigonometri gir den andre veien:

Den andre veien I

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{for } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{for } a < 0 \\ \pi/2 & \text{for } a = 0,\ b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{for } a = 0,\ b < 0 \end{cases}$$

Arkustangensfunksjonen skjønner ikke av seg selv om z ligger til høyre eller venstre for den imaginære aksen, og er z imaginær blir den ihvertfall forvirret. Derav alle tilfellene. Merk også at vi kan legge til vilkårlige multipler av 2π overalt, samt at for $z = 0$ er ikke θ definert. Det går også fint å beregne θ med sinus eller cosinus. Da slipper man å tenke på hvilken kvadrant z ligger i, men man må beregne r før man kan beregne θ:

Den andre veien II

$$\theta = \arccos\frac{a}{r} = \arcsin\frac{b}{r}$$

Vi skriver ellers

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

for avstanden fra z til origo. Dette tallet kalles gjerne absoluttverdi eller modulus til z. Vinkelen

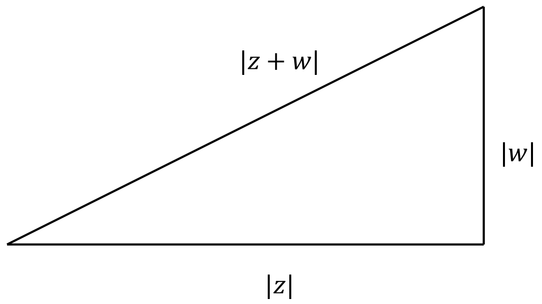
$$\theta = \arg z$$

kalles vinkelen eller argumentet til z. Følgende ulikhet kalles trekantulikheten, siden de involverte størrelsene er sidene i en rettvinklet trekant.

Trekantulikheten

La z og w være komplekse tall. Da gjelder at

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$



Eulers formel

Fra forrige semester husker du forhåpentligvis taylorrekkene til eksponensialfunksjonen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

sinusfunksjonen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og cosinusfunksjonen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dersom bruker den imaginære enheten i til å skrive

$$\cos x = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

og

$$i \sin x = ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

og legger disse to sammen, får vi

$$\cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix}.$$

Siden de tre rekkene er absolutt konvergente for alle $x \in \mathbb{C}$, er det klart at:

Eulers formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Denne kalles Eulers formel. Dersom man ikke er komfortabel med et argument basert på absolutt konvergente potensrekker, kan man også ta formelen som definisjon på e^{ix}. At vi er inne på noe, kan vi få bekreftet ved å observere at vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen er lette å utlede fra denne formelen. For eksempel er

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ &\quad + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ &= (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = e^{ix} e^{iy} \end{aligned}$$

Med Eulers formel kan vi skrive komplekse tall veldig kompakt:

Polar form

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$$

Hvis vi aksepterer Eulers formel, kan vi sette opp regneregler:

Regneregler for polar form

La $z = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\alpha}$. Da gjelder:

$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} e^{i(\theta-\alpha)}$$

Eksempel 1.3. Polar form er praktisk når man skal gange og dele komplekse tall. La $z = 1 + i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$, slik at

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

og

$$w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Vi beregner

$$z \cdot w = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

og

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{-\pi}{12}}.$$

△

Nå er det imidlertid sjelden at man ganger sammen komplekse tall for hånd. De geometriske tolkningene som Eulers formel gir oss, og sammenhengen med de trigonometriske funksjonene, er viktigere.

Eksempel 1.4. Eulers formel gir at $e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{3\pi i/2} = -i$ og $e^{2\pi i} = 1$. Merk at det å gange med i er det samme som å rotere et tall nitti grader (pi halve radianer) mot klokken. △

Eksempel 1.5. Dersom $z = re^{i\theta}$ gir Eulers formel $\overline{z} = re^{-i\theta}$. △

Eksempel 1.6. Bytter vi x med $-x$ i Eulers formel, får vi

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Hvis vi legger denne sammen med Eulers formel, ser vi at

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$$

og trekker vi dem fra hverandre, ser vi at

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}.$$

△

Husk ellers at

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

og

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Det er nå lett å se at

$$\cosh(ix) = \cos x$$

og

$$\sinh(ix) = i \sin x.$$

Dette kan vi bruke til å finne real- og imaginærdelen til sinus og cosinus:

Trigonometriske funksjoner på kartesisk form

$$\cos(a + bi) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$$
$$\sin(a + bi) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$

Røtter av komplekse tall

Hvis du plukker opp en tilfeldig bok i algebra eller kompleks analyse, er det bevist følgende teorem et eller annet sted. Teoremet heter algebraens fundamentalteorem.

Algebraens fundamentalteorem

Et polynom

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Merk. I teoremet over er $a_n = 1$. Det er for å slippe å luke ut tilfellet $a_n = 0$. Dersom $a_n \neq 0$, og noe annet enn 1, blir faktoriseringen

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - z_i).$$

Dersom en faktor $(z - z_k)$ forekommer m ganger i faktoriseringen, sier vi at z_k har multiplisitet m.

Eksempel 1.7. Polynomet

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z-1)^3$$

har en rot ($z = 1$) med multiplisitet 3. △

Eksempel 1.8. Polynomet

$$z^2 - 2z + 2$$

har to røtter

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i,$$

begge med multiplisitet 1, slik at

$$z^2 - 2z + 2 = (z - 1 - i)(z - 1 + i). \quad \triangle$$

Vi skal ikke bevise algebraens fundamentalteorem, men et spesialtilfelle kan vi analysere med det vi kjenner til så langt, nemlig løsninger av polynomlikningen

$$z^n = w$$

for et vilkårlig komplekst tall w. Vi skal se med egne øyne at denne likningen alltid har n løsninger. Vi begynner med å skrive w på polar form med valgfritt antall omdreininger rundt origo

$$w = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2m\pi)}.$$

Dersom vi skriver

$$w^{1/n} = (re^{i(\theta+2m\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta/n + 2m\pi/n)},$$

ser vi at det nå finnes n potensielle verdier for $\sqrt[n]{w}$, alle sammen gyldige løsninger av $z^n = w$. Hvis du velger $0 \leq m \leq n-1$ får du ut alle sammen. Vi definerer den prinsipale n-te roten av w som

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n},$$

og så kan vi skrive de andre røttene som

$$\sqrt[n]{w} \cdot e^{2m\pi i/n}$$

for $1 \leq m \leq n-1$. Dette er analogt til hvordan man i det reelle tilfellet har to løsninger av ligningen

$$x^2 = 4,$$

definerer kvadratroten som den positive løsningen

$$\sqrt{4} = 2,$$

og skriver den andre løsningen som $-\sqrt{4}$.

Eksempel 1.9. Vi finner alle løsninger av ligningen

$$z^5 = -1.$$

Siden

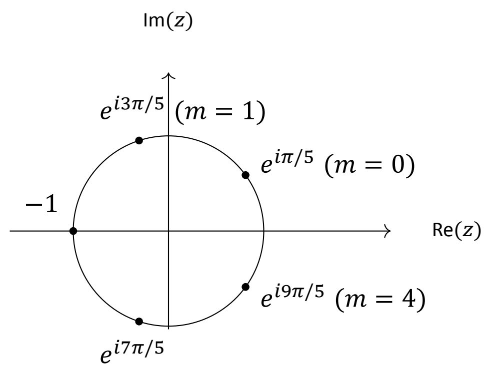
$$-1 = e^{i(\pi + 2m\pi)},$$

får vi

$$(-1)^{1/5} = e^{i(\pi/5 + 2m\pi/5)}.$$

Vi skriver opp løsningene for $0 \leq m \leq 4$:

$e^{i\pi/5} (= \sqrt[5]{-1})$, $e^{i3\pi/5}$, $e^{i5\pi/5} (= -1)$, $e^{i7\pi/5}$ og $e^{i9\pi/5}$



Femterøttene til -1

Merk hvordan røttene sprer seg jevnt ut på en sirkel om origo. Merk også at om vi lar $m > 4$ eller $m < 0$, får vi røtter som allerede er listet opp. △

Vi skal få bruk for algebraens fundamentalteorem senere i semesteret, når vi skal lære om egenverdier og egenvektorer.

Litt om rekker

Teoremene du lærte om rekker i forrige semester, er stort sett gyldige for komplekse rekker dersom man bytter ut absoluttverdi med modulus. Den store forskjellen ligger i dette med konvergensområde for taylorrekker. La oss bruke den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

som eksempel. Vi repeterer utledningen. Husk at

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n,$$

og

$$\begin{aligned}(1-z)S_n &= (1-z)\sum_{n=0}^{n} z^n \\ &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \\ &- (z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1}) = 1 - z^{n+1},\end{aligned}$$

slik at

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Nå kan vi bruke polar form, og skrive

$$S_n = \frac{1-\left(re^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{1-re^{i\theta}}$$

Det som nå avgjør hva som skjer, er faktoren

$$r^{n+1}$$

i telleren. Faktoren $e^{i(n+1)\theta}$ går bare i bane rundt enhets-sirkelen, og spiller ikke noen særlig rolle. Dersom $r = |z| < 1$, må

$$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = \lim_{n\to\infty} r^{n+1}e^{i(n+1)\theta} = 0$$

slik at

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Den store forskjellen fra det reelle tilfellet er at ulikheten

$$|z| < 1$$

nå representerer en det indre av en sirkelskive istedet for et intervall, og det forklarer hvorfor vi sier at konvergens-radien er 1. Vi skal se mer på komplekse rekker i fjerde semester.

Oppgaver

Med LF

1. La z og w være følgende komplekse tall:

$$z = \frac{3\pi}{4}i \qquad w = -\frac{3\pi}{4}i$$

a) Skriv tallet $e^z - e^w$ på polar form.
b) Skriv tallet e^z/e^w på polar form.

2. La z og w være komplekse tall. Vis at
a) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$.
b) $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$.
c) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$
d) $\text{Re}(z) \leq |z|$
e) $|z+w| \leq |z| + |w|$

3. La z_n være en kompleks følge. Vis at dersom

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

er konvergent, er også

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

konvergent.

4. Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n.$$

Hva konvergerer rekken til i konvergensområdet?

5. Vis at

$$\cos(a+bi) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$$
$$\sin(a+bi) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$

6. Bruk taylorrekker til å vise at

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

7. Løs likningssystemet

$$\begin{aligned}(1-i)z + 3w &= 2-3i \\ iz + (1+2i)w &= 1\end{aligned}$$

8. Vis at inversen til

$$\begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

er

$$\frac{1}{3-2i}\begin{bmatrix} 1+2i & -3 \\ -i & 1-i \end{bmatrix}$$

9. Avgjør om kolonnene i matrisen

$$\begin{bmatrix} 2i & 3 & 4 \\ 3i & 4 & 5 \\ 4i & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

lineært avhengige.

Uten LF

10. Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2z + iw + (5-3i)u &= 10 \\ 4z + 2iw + (10+2i)u &= 20+16i \\ 2iz - w + (4+6i)u &= 2+12i \end{aligned}$$

11. Løs likningssystemene

a) $\left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 1 & 1 \\ 1 & i & 1+i \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & 1 & 1+i \end{array}\right]$

12. Skriv $z = 1 + i\sqrt{3}$ på polar form.

13. La $z = a + bi = re^{i\theta}$. Forklar geometrisk at

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{for } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{for } a < 0 \\ \pi/2 & \text{for } a = 0,\ b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{for } a = 0,\ b < 0 \end{cases}$$

14. La z være et valgfritt komplekst tall. Tegn z og en sirkel sentrert i origo med radius $|z|$ i samme koordinatsystem. Tegn så iz, $-z$, $-iz$ i det samme koordinatsystemet.

15. Skissér alle z i det komplekse planet som tilfredstiller
a) $\text{Im}\, z > 0$.
b) $z\overline{z} = 9$.
c) $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$.
d) $z^2 = 0$.
e) $z - (\overline{z - 2i}) = 0$.

16. Uttrykk

$$f(z) = \frac{\cos z}{z}$$

som en potensrekke. For hvilke z konvergerer rekken?

17. I python skriver man 1j for i. Lag et script som plotter $z = e^{i\theta}$ i det komplekse planet, og kjør scriptet for forskjellige verdier av θ.

18. Skriv $\sqrt{3} + i$ og $1 - i$ om til polar form og regn ut
a) $(\sqrt{3}+i)\cdot(1-i)$
b) $(\sqrt{3}+i)/(1-i)$

19. På videregående lærte du at differensiallikningen

$$y''(t) + y(t) = 0$$

har generell løsning

$$y(t) = A\cos t + B\sin t.$$

a) Vis at denne løsningen like gjerne kan skrives

$$y(t) = Ce^{it} + De^{-it}.$$

b) Vis at dersom A og B er reelle tall, er C og D er komplekskonjugerte av hverandre.

c) Vis at dersom A og B er reelle tall, kan løsningen skrives

$$y(t) = a\sin(t + \phi),$$

der a og ϕ er reelle tall.

20. Vis at de komplekse røttene til et polynom med reelle koeffisienter kommer i komplekskonjugerte par.

Løsningsforslag

1. Denne er en illustrasjon av at Eulers formel er grei når man skal gange sammen komplekse tall.

a) Euler gir

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

og

$$e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Nå kan vi regne ut at

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2i\sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}i$$

b) Denne blir veldig grei:

$$\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

2. La z og w være komplekse tall. Vis at

c) Bruk polarform $z = re^{i\theta}$ og $w = \rho e^{i\phi}$. Da er

$$\overline{z/w} = \overline{(r/\rho)e^{i(\theta-\phi)}} = (r/\rho)e^{i(-\theta-(-\phi))} = \overline{z}/\overline{w}.$$

d) Bruk igjen polarform, og se at

$$(\overline{z})^n = \left(re^{-i\theta}\right)^n = r^n e^{-in\theta} = \overline{(z^n)}$$

e) Her er det bare å brette opp ermene og gange ut:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\ &+ (z-w)\overline{(z-w)} \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &+ z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2 \end{aligned}$$

f) La $z = a + bi$. Vi ser at

$$\mathrm{Re}(z) = a \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|.$$

(Det samme gjelder for $\mathrm{Im}(z)$.)

g) Vi har at

$$\begin{aligned} |z+w|^2 =&(z+w)\overline{(z+w)} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 \\ =&|z|^2 + 2\mathrm{Re}(zw) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|zw| + |w|^2 \\ =&|z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

og kvadrerer vi denne, får vi

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

3. La $z_n = a_n + ib_n$. Vi har $a_n = \mathrm{Re}(z) \leq |z|$ og $b_n = \mathrm{Im}(z) \leq |z|$. For en bestemt partialsum, må vi ha at

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |z_n|$$

og dette impliserer at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

er en absolutt konvergent rekke. Dette betyr igjen at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

er konvergent. Det samme resonnementet viser at

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

er konvergent, og følgelig er

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergent.

4. Dette er en geometrisk rekke, og forholdstesten forteller oss at rekken konvergerer dersom $|1-z| < 1$. Utledningen av geometrisk rekke er like fin for komplekse z, så vi ser at

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n.$$

5. Vi beregner

$$\begin{aligned} \cos(a+bi) &= \cos a\cos bi - \sin a\sin bi \\ &= \cos a\cosh b - i\sin a\sinh b \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \sin(a+bi) &= \sin a\cos bi + \cos a\sin bi \\ &= \sin a\cosh b + i\cos a\sinh b. \end{aligned}$$

6. Denne står på side 2.

7. Likningssystemet har totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i \\ i & 1+2i & 1 \end{array}\right].$$

Vi ønsker å kvitte oss med i-en til venstre i den andre raden. Den første raden ganget med $\frac{i}{1-i}$ er

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & \frac{3i}{1-i} & \frac{3+2i}{1-i} \end{array}\right].$$

Vi trekker dette fra den andre raden og erstatter den andre raden med resultatet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i \\ 0 & 1+2i-\frac{3i}{1-i} & 1-\frac{3+2i}{1-i} \end{array}\right].$$

Jeg tror vi ganger den andre raden med $1-i$ for å rydde litt:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 3 & 2-3i \\ 0 & 3-2i & -2-3i \end{array}\right]$$

Vi er nå klare for å beregne w og z:

$$\begin{aligned} w &= \frac{-2-3i}{3-2i} = \frac{-2-3i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = -i \\ z &= \frac{2-3i-3(-i)}{1-i} = 1+i \end{aligned}$$

8. Her er det bare å gange dem sammen:

$$\frac{1}{3-2i}\begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+2i & -3 \\ -i & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Nope, for

$$-i\begin{bmatrix} 2i \\ 3i \\ 4i \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$