Kapittel 2

Fourierrekker

Du har lært at mange glatte funksjoner kan skrives som en potensrekke. For eksempel er

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

for alle t.

En større klasse av funksjoner kan skrives som rekker av sinus- og cosinusfunksjoner. Joseph Fourier oppfant fourierrekker da han prøvde å løse varmelikningen tidlig på 1800-tallet. Problemet han støtte på, var at han måtte skrive en funksjon f som en uendelig rekke av sinusfunksjoner:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt,$$

på intervallet $[-\pi, \pi]$, og han begynte å lure på hvilke funksjoner som kunne skrives slik. Hvis du har noen triks i ermet, er det ikke så vanskelig å gjette formen på koeffisientene.

Det er nemlig slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

og Fourier benyttet seg av dette omtrent som følger. La oss gange likningen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt,$$

med $\sin mt$ og integrere;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sin mt \, dt$$

Hvis vi bytter plass på integraltegnet og summen, får

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt$$

og nå blir det en haug med kanselleringer, og vi får

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \pi b_n.$$

slik at

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt.$$

Det viser seg at veldig mange funksjoner kan skrives som en uendelig rekke av sinuser eller cosinuser, men ideene hans ble i noen grad avskrevet av samtidige matematikere, for bevisene hans (slik som det over) holdt ikke alltid vann. Men eksemplene han oppdrev på at en funksjon med knekkpunkt kan skrives som en uendelig rekke av glatte funksjoner var imidlertid banebrytende, og stimulerte andre matematikere til å utvikle nytt maskineri for å rydde opp i konvergensspørsmålene Fourier gjettet tildels riktig på.

Andre artige opplysninger om Joseph Fourier, er at at han ble satt i fengsel under den franske revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte, og regnes som oppdageren av drivhuseffekten. De satte opp en statue av ham i hjembyen Auxerre i 1849, men den ble visst rekvirert av staten og smeltet om under andre verdenskrig.

Tradisjonelt sett har fourierrekker vært pensum i TMA4120 på Gløshaugen. Se på gamle eksamener i 4K her for et rikholdig utvalg av regneeksempler. Se også Adams kap. 9.9, Kreyszig kap. 11 og Boyce/DiPrima kap. 10. (Du finner alle disse bøkene på nettet.)

Litt om funksjoner

I M1 var alle funksjoner reelle. En kompleks funksjon av en reell variabel er en funksjon

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

Man kan tenke på f som en parametrisering av en kurve i det komplekse planet.

Eksempel 2.1. Funksjonen

$$f(t) = (1+i)t \quad t \geq 0$$

beskriver en rett linje i første kvadrant i det komplekse planet. △

Eksempel 2.2. Fra forrige uke husker du forhåpentligvis Eulers formel

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Denne funksjonen kalles en kompleks eksponensialfunksjon. Merk at funksjonsverdiene ligger på enhetssirkelen i det komplekse planet, og funksjonen kan betraktes som en parametrisering av denne.

Dersom vi erstatter t med $-t$ i Eulers formel, får vi

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t.$$

Disse to likningene kan kombineres til

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

og

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Med andre ord: om vi har en funksjon som involverer sinus- og cosinusfunksjoner, kan den like gjerne skrives med komplekse eksponensialfunksjoner. △

Når man skal forstå fourierrekker er det ikke mulig å komme utenom periodiske funksjoner.

Periode

En funksjon sies å ha periode $p > 0$ dersom

$$f(t + p) = f(t)$$

for alle t i definisjonsmengden til f. Den minste p slik at likningen holder for alle t, kalles fundamentalperioden til f.

Eksempel 2.3. La

$$f(t) = \sin t$$

Denne funksjonen har perioder $2n\pi$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er 2π. △

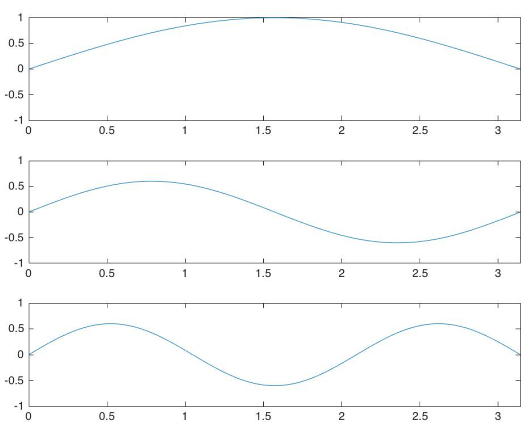
Dersom f har periode p, og $g(t) = f(kt)$, har g periode p/k, for

$$\begin{aligned} g(t) &= f(kt) = f(kt + p) \\ &= f(k(t + p/k)) = g(t + p/k). \end{aligned}$$

Eksempel 2.4. La

$$f(t) = \sin(3t)$$

Denne funksjonen har perioder $2n\pi/3$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er $2\pi/3$. Under er plot av funksjonene $\sin t$, $\sin 2t$ og $\sin 3t$. △



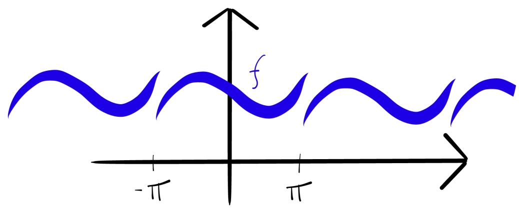
Eksempel 2.5. Den komplekse eksponensialfunksjonen $e^{it} = \cos t + i \sin t$ også fundamentalperiode 2π. △

Eksempel 2.6. La vi $k = 2\pi/T$ og sammenlikner med forrige eksempel, ser vi at den komplekse eksponensialfunksjonen $e^{2\pi i t/T}$ har fundamentalperiode T. Det er vanlig å skrive $\omega = 2\pi/T$. △

Hvis man tar en funksjon

$$f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$$

og kopierer funksjonen slik at den ser identisk ut på $[\pi, 3\pi)$, $[3\pi, 5\pi)$ og så videre, får man noe som kalles den periodiske utvidelsen til f:



Eksempel 2.7. Den 2π-periodiske utvidelsen av funksjonen $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

kalles en firkantbølge. △

Eksempel 2.8. Den 2π-periodiske utvidelsen av funksjonen $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(t) = t$$

kalles en sagtannbølge. △

Fourierrekker på kompleks form

En trigonometrisk fourierrekke er en rekke på formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Dette er en geometrisk rekke med multiplikasjonsfaktor e^{it}, og den er periodisk med fundamentalperiode 2π. Vi skal bare jobbe med trigonometriske fourierrekker, så fra nå av sier vi bare fourierrekke. Senere skal vi sette opp fourierrekker med andre perioder enn 2π, men formlene blir mer grisete, så vi tar 2π først. Av pedagogiske hensyn skal vi av og til skrive

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Denne skrivemåten er litt lettere å skjønne noe av i begynnelsen, men vesentlig mer kløenete å jobbe med i de fleste situasjoner. Fra tid til annen er det også praktisk å skrive

$$d_0 + \sum_{n=1}^{N} d_n \cos(nt + \phi_n),$$

se øvingsopplegg.

Det vakreste

La
$$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$$
være en funksjon.
Vi definerer f sin fourierrekke som
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$
der
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$
og skriver
$$f(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Det er to spørsmål som tvinger seg frem. Begge spørsmålene er ganske tekniske å svare ordentlig på, så vi skal skyve dem litt foran oss.

Det første store spørsmålet

Hvorfor er koeffisientene gitt ved
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \quad ?$$

Dette er et veldig interessant spørsmål, og egentlig en jobb for lineæralgebradepartementet. På sett og vis kan man si at vi skal bruke mesteparten av dette semesteret på å svare på akkurat dette spørsmålet.

Det andre store spørsmålet

Er det meningen at vi skal skrive
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad ?$$

Svaret på dette spørsmålet er definitivt ja, men man må være litt forsiktig med hva man svarer ja på. Dette avhenger nemlig i veldig stor grad av f.
Og så til slutt

Et ikke fullt så stort spørsmål

Kan vi ha andre intervaller enn $[-\pi,\pi]$?

Svaret på dette er null stress joggedress, men det er greit å begynne med $[-\pi,\pi]$, for da blir ikke formlene så grisete.
Selve grunnideen med fourierrekker er noen tusen år gammel, og ved første øyekast kan man bli forledet til å tro at kun harmoniske svingebevegelser kan skrives på denne måten Dette trodde de fleste matematikere helt frem til 1700-tallet eller så. Det viser seg imidlertid at veldig mange funksjoner kan skrives som trigonometriske rekker. Joseph Fourier klarte ikke bevise dette ordentlig, men Dirichlet fant ut av det i 1829, og oppfant en konvergentstest i samme slengen. Det finnes noen berømte eksempler på kontinuerlige funksjoner der fourierrekken ikke konvergerer til funksjonen, men deriverbarhet gjør susen. Se siste avsnitt for vanskelige teoremer med bevis.

Konvergensteoremet

Teorem 2.9. La f være en stykkvis kontinuerlig deriverbar funksjon på $[-\pi,\pi]$, der den venstre- og høyrederiverte eksisterer i eventuelle bruddpunkter, og la
$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$
Hvis f er kontinuerlig i punktet t, konvergerer fourierrekken til $f(t)$ i t. Dersom f ikke er kontinuerlig i t, konvergerer fourierrekken til
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(t-h)+f(t+h)}{2}.$$
I endepunktene konvergerer fourierrekken til
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\pi-h)+f(-\pi+h)}{2}.$$
Dersom f er kontinuerlig deriverbar, er
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$
på $(-\pi,\pi)$, og dersom f er kontinuerlig deriverbar med periode 2π, er
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$
på $[-\pi,\pi]$.

Eksempel 2.10. Vi finner fourierrekken til $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ gitt ved
$$f(t)=t.$$
Vi beregner
$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0,$$
og
$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\,dt = -\frac{1}{2in}(e^{-in\pi}+e^{in\pi})\\ &= -\frac{1}{in}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{in}.\end{aligned}$$
Siden t er glatt på intervallet $(-\pi,\pi)$, kan vi skrive
$$\begin{aligned}t &= \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{int}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{int} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{in}e^{-int}\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt\end{aligned}$$

på $(-\pi, \pi)$. Merk at fourierrekken konvergerer til

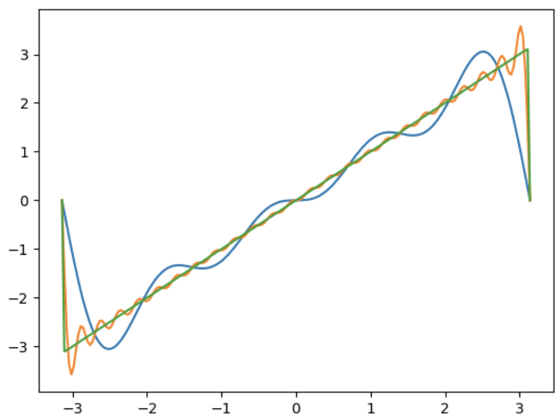
$$0 = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\pi - h) + f(-\pi + h)}{2}$$

i endepunktene. $\triangle$

Uttrykket

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

kalles den N-te partialsummen til fourierrekken. Under er et plot av tre av partialsummene til f i eksemplet over. Den blå er S_5, den gule er S_{25} og grønne erS_{5000}. Merk hvordan det er umulig å se forskjell på S_{5000} og f unntatt i endepunktene.



Fourierrekker på reell form

Dersom f er reell, blir fourierrekken også reell, som illustrert i forrige eksempel. Dette følger av formelen for koeffisientene c_n. Dersom f er reell, kan vi skrive

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{e^{int}}\, dt \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int}\, dt} = \overline{c_{-n}} \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = c_n e^{int} + \overline{c_n e^{int}}$$

blir en reell funksjon, og følgelig er hele fourierrekken reell. Vi kan fint sette opp fourierrekken direkte med sinus- og cosinusfunksjoner.

Fourierrekker på reell form

En annen variant er

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

med koeffisienter:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt$$

Det er vanlig å kalle alt dette ’reell fourierrekke’, men det er litt misvisende, siden en fourierrekke kan være reell selv om den er skrevet ned med komplekse eksponensialfunksjoner.

Eksempel 2.11. Vi finner fourierrekken til $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ der

$$f(t) = t$$

en gang til. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = 0 \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt\, dt = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt\, dt = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Merk at symmetri gir a_0 og a_n, mens b_n må beregnes. Fourierrekken blir som kjent

$$t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt. \qquad \triangle$$

Vi kan utlede formler for overgangen mellom fourierrekker på reell og kompleks form:

$$\begin{aligned} c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int}\, dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(e^{-int} + e^{int} \right)\, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt = a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n - c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int}\, dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(e^{-int} - e^{int} \right)\, dt \right) \\ &= \frac{-i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt = -ib_n \end{aligned}$$

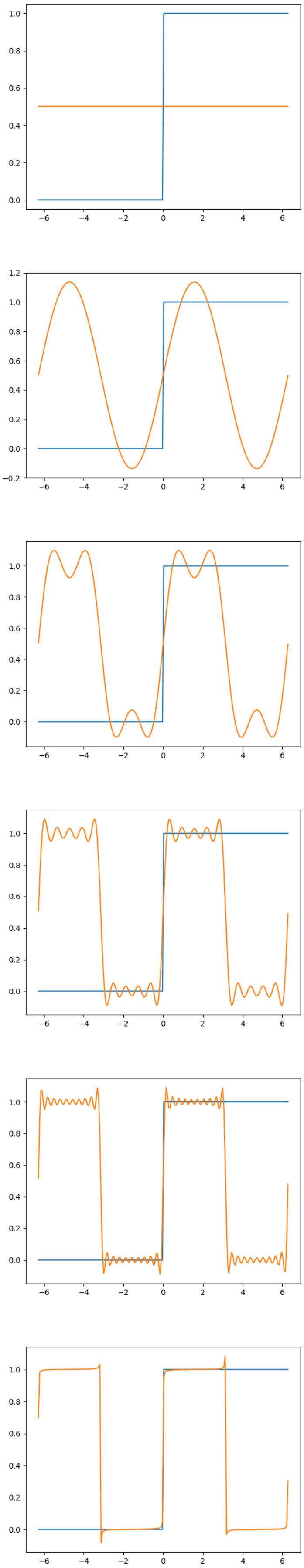
Vi kan selvfølgelig også snu om på disse formlene. Alt i alt, dersom $n \in \mathbb{N}$:

Overgang mellom reell og kompleks

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Eksempel 2.12. Vi finner heavisidefunksjonen



$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{for } t < 0. \end{cases}$$

sin reelle fourierrekke på $(-\pi, \pi)$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} dt = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos nt\, dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin nt\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nt\, dt \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases} \end{aligned}$$

Her kan vi bare skrive

$$u(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t,$$

for fourierrekken konvergerer til u på intervallene $(-\pi, 0)$ og $(0, \pi)$, men til $1/2$ i $t = 0$ og $t = \pm\pi$. Partialsummene er gitt ved

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t.$$

Under er plot av partialsummer for $n = 0, n = 1, n = 2, n = 5, n = 10$ og $n = 100$. Jeg har plottet på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ for å illustrere hvordan fourierrekken oppfører seg utenfor intervallet $[-\pi, \pi]$. Merk den lille over- og underskytningen partialsummene gjør på hver side av spranget. Denne er alltid på rundt 9% av sprangets høyde, og oppførelen kalles Gibbs fenomen, til tross for at det først ble oppdaget av en som het Wilbraham. Spranget forsvinner på mystisk vis når $n \to \infty$. $\triangle$

Andre intervaller

Å utlede formler for fourierrekker på andre intervaller enn $[-\pi, \pi]$ er ikke vanskelig, men formlene blir mer grisete og vanskeligere å huske.

Fourierrekker på generelt intervall

For intervallet $[-L, L]$ skriver man

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi t}{L}}. \tag{2.1}$$

eller

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L}.$$

Koeffisientene er gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}}\, dt,$$

og

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\, dt$$

henholdsvis.

Utledning er identisk med utledning på intervallet $[-\pi, \pi]$. På samme måte kan man sette opp fourierrekker på intervallet $[a, b]$, men det dropper vi.

Eksempel 2.13. Vi beregner den komplekse fourierrekken til heavisidefunksjonen på $[-1, 1]$. Koeffisientene blir

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-i\frac{n\pi t}{L}}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{n\pi i} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for jevne } n, \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$u(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{(2n-1)\pi i t}.$$

Merk nok en gang at

$$c_n e^{n\pi i t} + c_{-n} e^{-n\pi i t} = \frac{2}{n\pi}\sin n\pi t,$$

slik at

$$\begin{aligned} u(t) &\sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{(2n-1)\pi i t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi t. \end{aligned}$$ △

Odde og jevne funksjoner

Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-t) = -f(t)$$

og jevn dersom

$$f(-t) = f(t).$$

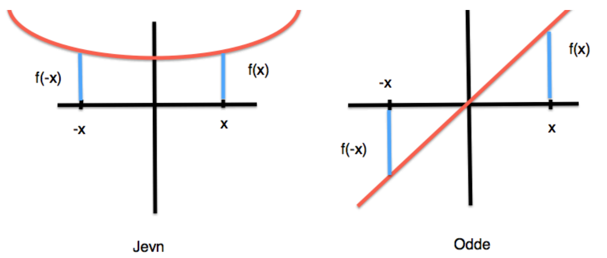
for alle t i definisjonsmengden til f. Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y-aksen. En rask kikk på figur overbeviser oss om at

$$\int_{-L}^{L} f(t)\, dt = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^{L} f(t)\, dt = 2\int_{0}^{L} f(t)\, dt$$

for jevne funksjoner.



Eksempel 2.14. Man kan vise at produktet av to jevne eller to odde funksjoner blir en jevn funksjon, og at produktet av en jevn og en odde funksjon blir en odde funksjon. La f være odde og g være jevn. Siden $f(-t) = -f(t)$, og $g(-t) = g(t)$, får vi

$$f(-t)g(-t) = -f(t)g(t),$$

altså er fg en odde funksjon. De andre tilfellene bevises på samme måte. △

Eksempel 2.15. Merk at $u - \frac{1}{2}$ er en odde funksjon. Denne strukturen kommer til syne i fourierrekken til u. △

Merk at dersom f er odde, er $a_n = 0$ for alle n, mens dersom f er jevn, er $b_n = 0$ for alle n. Fourierrekken til en odde funksjon inneholder følgelig kun sinusfunksjoner, mens fourierrekken til jevne funksjoner inneholder kun cosinusfunksjoner.

Dersom en funksjon f har definisjonsmengde $(0, L)$, kan vi definere den odde utvidelsen

$$f_o = \begin{cases} f(t) & \text{for } t = (0, L) \\ -f(-t) & \text{for } t = (-L, 0) \end{cases}$$

og den jevne utvidelsen

$$f_j = \begin{cases} f(t) & \text{for } t = (0, L) \\ f(-t) & \text{for } t = (-L, 0). \end{cases}$$

Siden både f_o og f_j er identiske med f på $(0, L)$, vil fourierrekkene deres konvergere til $f(t)$ på $(0, L)$. Man kan

således velge mellom sinus eller cosinus når man skal fourierutvikle f på $(0, L)$. Disse kalles henholdsvis sinus- og cosinusrekkene til f på $(0, L)$.
Vi ser på fourierutviklingen til f_o. For den har vi at $a_n = 0$ for alle n, og at

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_o(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt. \end{aligned}$$

For fourierutviklingen til f_j, har vi tilsvarende at

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_j(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \\ &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \end{aligned}$$

samt

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_j(t)\,dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,dt.$$

Eksempel 2.16. Vi beregner cosinusrekken til $f(t) = t$ på $(0, \pi)$. Koeffisientene blir

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \pi/2$$

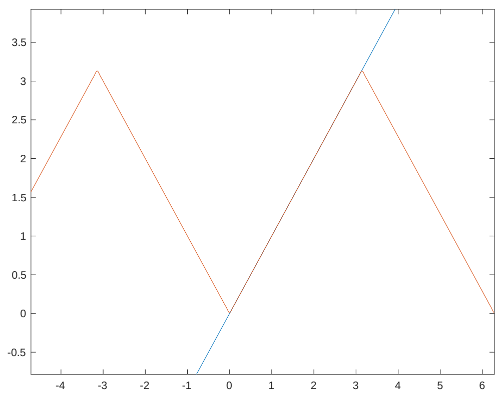
og

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos nt\,dt = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for for jevne } n. \end{cases}$$

slik at

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t$$

på intervallet $(0, \pi)$. Under er et plot af $f(t) = t$ og cosinusrekken på et litt større intervall enn $[0, \pi]$. △



Parsevals teorem

En uendeligdimensjonal variant av pytagoras, kalles Parsevals teorem. Vi skal få en magefølelse for hvorfor senere i semesteret.

Parsevals teorem

Anta f er riemannintegrerbar, og at

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi t}{L}}.$$

Da gjelder Parsevals identitet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(t)\,dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \end{aligned}$$

Eksempel 2.17. Vi kan bruke fourierrekken til heavisidefunksjonen til å finne summen til rekken

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Siden

$$u(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$

og u er glatt i $t = \pi/2$, ser vi at

$$\begin{aligned} 1 = u(\pi/2) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

△

Eksempel 2.18. Vi kan bruke Parsevals identitet til å finne summen til den kjente og kjære rekken

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Siden

$$t \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt,$$

gir Parsevals identitet at

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

eller

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

△

Vanskelig teori

Hvis du slår opp i et kapittel om fourierrekker i en vanlig lærebok i matematikk, begynner de gjerne med noe slikt:

Anta at vi har en funksjon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ som vi har lyst til å skrive

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$

Ok, så hva må koeffisientene være? La oss gange hele greia med $\sin mt$ og integrere alt sammen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sin mt \, dt$$

Det neste steget er å bytte plass på integraltegnet og summen, slik at vi får

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt$$

og så bruke at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

for å se at det blir en haug med kanselleringer på høyresiden, og at vi derfor får

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \pi b_n.$$

Men denne 'utledningen' gir en litt falsk følelse av forståelse. Det er et problem her, som er illustrert av et eksempel fra kapittel 7 i Rudin. Problemet ligger i likningen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sin mt \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt$$

Følgende eksempel viser at det å bytte om på integrasjon og uendelig sum kan være farlig. La

$$f_n(t) = nt\left(1 - t^2\right)^n.$$

Fra rekketeorien ser vi enkelt at

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} nt\left(1 - t^2\right)^n = 0$$

dersom $0 \leq t \leq 1$, slik at

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t) \, dt = 0.$$

Men

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

Det ligger altså ingen nødvendighet i at det går greit å bytte om på uendelig sum og integral:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t) \, dt \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt$$

Følgende strategi er derfor å foretrekke. Strategien er litt teknisk, men leder frem mot riktig resultat uten alt for mange vanskeligheter. En generell fourierrekke er et uttrykk på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t).$$

Vi skal nå utlede litt teori om disse. La f og g være komplekse funksjoner av en reell variabel på intervallet $[a, b]$. Vi skal senere i semesteret se at integralet

$$\int_a^b f \, \overline{g}$$

er en generalisering av indreproduktet mellom vektorer, og har alle de samme egenskapene. Vi sier at f og g er ortogonale på $[a, b]$ dersom

$$\int_a^b f \, \overline{g} = 0.$$

Et ortogonalt system $\{\phi_n\}$ er familie av funksjoner ϕ_n som er innbyrdes ortogonale. Merk at siden

$$f \overline{f} = |f|^2 \geq 0,$$

er

$$\int_a^b f \overline{f} \geq 0,$$

og den eneste funksjonen som tilfredsstiller

$$\int_a^b f \overline{f} = 0$$

er $f = 0$. På samme vis som $\int_a^b f \, \overline{g} \, dt$ er en generalisering av indreproduktet mellom vektorer, er

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f \overline{f}}$$

en generalisering av lengden til en vektor.
Dersom en familie $\{\phi_n\}$ av funksjoner er innbyrdes ortogonale, sier vi at $\{\phi_n\}$ er et ortogonalt system, og dersom de tilfredsstiller

$$\int_a^b \phi_n \, \overline{\phi_m} = \begin{cases} 1 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

sier vi at familien er ortonormal.

Eksempel 2.19. De komplekse eksponensialfunksjonene

$$e^{int} \quad n \in \mathbb{Z}$$

utgjør et ortogonalt system på intervallet $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{mt}} \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} \, dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} \, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

△

Eksempel 2.20. Funksjonene

$$\frac{1}{2\pi} e^{int} \quad n \in \mathbb{Z}$$

er et ortonormalt system på intervallet $[-\pi, \pi]$. △

Dersom f og g er reelle, blir $f = \overline{f}$ og $g = \overline{g}$, slik at indreproduktet kan skrives

$$\int_a^b f\ g\ dt.$$

Reelle funksjoner kan også danne ortogonale systemer.

Eksempel 2.21. La $m, n \geq 1$. Siden

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\ dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\ dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt\ dt = 0$$

utgjør $\{\sin nt, \cos mt\}$ også et ortogonalt system på $[-\pi, \pi]$. Det er ikke så vanskelig å se at disse er ortogonale. Vi beviser det for cosinusfunksjonene. Først skriver vi om litt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt; dt =$$
$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)t + \cos(n-m)t\ dt$$

Det siste integralet er lett å beregne. Det forsvinner for alle verdier av m og n, unntatt når $m = n$, for da er

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = \pi,$$

slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt; dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

De to andre formlene bevises på samme måte. △

Eksempel 2.22. Legendrepolynomene er en familie av polynomer gitt ved rekursjonen

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ (n+1)P_{n+1}(t) &= (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t). \end{aligned}$$

og er et ortogonalt system på intervallet $[-1, 1]$. De første fem polynomene er:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \end{aligned}$$

Vi skal ikke ha bruk for legendrepolynomene i dette kapitlet, men vi skal møte dem senere når vi skal ha om interpolasjon og numerisk integrasjon. Legendrepolynomene dukker opp i mange sammenhenger, både i matematikken og i andre fagfelt. Det kanskje mest kjente eksemplet utenfor matematikken, er Schrødingers likning for hydrogenatomet, der disse dukker opp i familien av løsninger. △

Dersom en funksjon kan skrives som en lineærkombinasjon av funksjoner i et ortogonalt system, er det lett å utlede formler for koeffisientene i lineærkombinasjonen.

Teorem 2.23. Dersom $\{\phi_n\}$ er et ortonormalt system på $[a, b]$, og

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(t),$$

er

$$c_n = \int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}\ dt$$

Bevis. Vi ganger f med $\overline{\phi_m}$:

$$f(t)\overline{\phi_m(t)} = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(t)\overline{\phi_m(t)},$$

integrerer

$$\int_a^b f(t)\overline{\phi_m(t)}\ dt, = \sum_{n=1}^{N} c_n \int_a^b \phi_n(t)\overline{\phi_m(t)}\ dt,$$

og bruker ortogonaliteten:

$$\int_a^b f(t)\overline{\phi_m(t)}\ dt = c_m.$$ □

Koeffisientene c_n kalles fourierkoeffisientene. De har følgende artige egenskap dersom vi begrenser oss til funksjoner som tilfredsstiller $\int_a^b f^2 < \infty$.

Teorem 2.24. Dersom

$$f = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n,$$

er

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 = \int_a^b f^2$$

Bevis. Vi ganger nå f med $\overline{f}$:

$$f\overline{f} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} c_n \overline{c_m} \phi_n \overline{\phi_m},$$

integrerer og bruker ortogonaliteten igjen:

$$\begin{aligned} \int_a^b f\overline{f} &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} c_n \overline{c_m} \int_a^b \phi_n \overline{\phi_m} \\ &= \sum_{n=1}^{N} c_n \overline{c_n} = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \end{aligned}$$ □

Dersom f ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av funksjonene ϕ_n, har allikevel uttrykket

$$\sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n,$$

noen gunstige egenskaper. Lineærkombinasjonen med fourierkoeffisientene som vekter er en god approksimasjonen til f.

Teorem 2.25. Dersom

$$h(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n(t),$$

med

$$c_n = \int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}\, dt$$

og

$$g(t) = \sum_{n=1}^{N} d_n\phi_n(t),$$

er

$$\int_a^b |f(t) - h(t)|^2\, dt \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|^2\, dt$$

Bevis. Denne beregningen er litt hårete, men du finner nok ut av det med penn og papir:

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|^2\, dt = \int_a^b |f(t)|^2\, dt - \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt - \int_a^b \overline{f(t)}g(t)\, dt + \int_a^b |g(t)|^2\, dt =$$

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt - \sum_{n=1}^{N} c_n\overline{d_n} - \sum_{n=1}^{N} \overline{c_n}d_n + \sum_{n=1}^{N} d_n\overline{d_n} =$$

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt - \sum_{n=1}^{N} c_n\overline{c_n} + \sum_{n=1}^{N} |c_n - d_n|^2.$$

Det siste uttrykket er helt klart minimert dersom man velger $d_n = c_n$. □

Det neste teoremet kalles gjerne Bessels ulikhet, ihvertfall dersom $n \to \infty$.

Teorem 2.26. Dersom

$$h(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n(t),$$

med

$$c_n = \int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}\, dt$$

er

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\, dt$$

Bevis. Fra forrige bevis vet vi at

$$\int_a^b |f(t) - h(t)|^2\, dt = \int_a^b |f(t)|^2\, dt - \sum_{n=1}^{N} c_n\overline{c_n}.$$

Siden

$$\int_a^b |f(t) - h(t)|^2\, dt \geq 0,$$

må

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \geq \sum_{n=1}^{N} c_n\overline{c_n}.$$ □

Merk til slutt at dersom vi har uendelig mange funksjoner ϕ_n, impliserer Bessels ulikhet at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

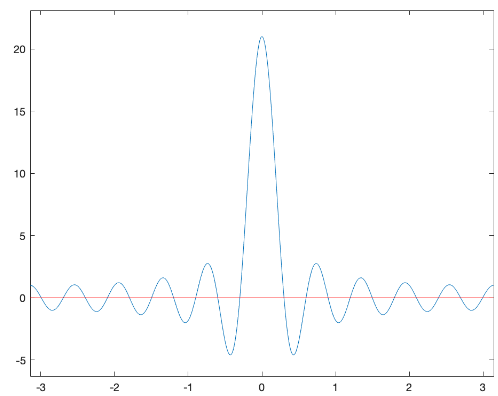
er en konvergent rekke, og at $\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$.
Vi får snart bruk for uttrykket

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int},$$

som kalles dirichletkjernen. Den er en reell funksjon, for vi kan skrive

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos nt.$$

Under er et plot av dirichletkjernen for $N = 10$.



Vi kan også lage en enda penere formel. Først utnytter vi at en trigonometrisk rekke er en geometrisk rekke med faktor e^{it}, og skriver

$$e^{iNt}\sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \sum_{n=0}^{2N} e^{int} = \frac{e^{i(2N+1)t}-1}{e^{it}-1},$$

så lenge $e^{it} \neq 1$. Siden

$$\frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}}e^{iNt} = 1$$

kan vi beregne

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} e^{int} &= \frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}}e^{iNt}\sum_{n=-N}^{N} e^{int} \\ &= \frac{e^{i(N+1/2)t}-e^{-i(N+1/2)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}\end{aligned}$$

for $t \neq 2k\pi$. Mer om denne i øvingsopplegget.

Teorem 2.27. La f være en 2π-periodisk funksjon slik at $\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ konvergerer. Dersom f er deriverbar i t, er

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = f(t).$$

Bevis. Dette er et pent bevis laget av en kar som heter Paul Chernoff. Formlene i beviset blir litt enklere å skrive opp dersom vi antar $t = 0$ og at $f(0) = 0$. Hvis ikke er dette er tilfelle, kan vi flytte hele problemet slik at t ligger på origo, noe som er helt greit siden f er 2π-periodisk, og så subtrahere $f(0)$ fra f, som også er greit siden $f(x) - f(0)$ også tilfredsstiller betingelsene i teoremet. Vi må vise at

$$\lim_{N\to\infty} S_N(0) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n = 0$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} c_n &= \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-N}^{N} e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{e^{i(N+1/2)t}-e^{-i(N+1/2)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{e^{i(N+1)t}-e^{-iNt}}{e^{it}-1}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{e^{it}-1}e^{-i(N+1)t}\,dt \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{e^{it}-1}e^{iNt}\,dt\end{aligned}$$

De to siste integralene er fourierkoeffisienter til funksjonen

$$g(t) = \frac{f(t)}{e^{it}-1}.$$

og må derfor gå mot null når $N \to \infty$ dersom $\int_{-\pi}^{\pi} g^2$ konvergerer. Siden f er deriverbar og $f(0) = 0$, er g begrenset i området rundt 0, og følgelig må $\int_{-\pi}^{\pi} g^2$ konvergere siden $\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ gjør det. □

Oppgaver

Uten LF

1. Regn ut

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt \, dt$$

for alle kombinasjoner av $m, n \in \mathbb{N}$.

2. Anta du har en funksjon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Vis at dersom

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt$$

må

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

3. Vis at fourierrekken til funksjonen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

er

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t.$$

Denne funksjonen kalles enhetssprangfunksjonen, eller heavisidefunksjonen.

4. Lag et script som plotter partialsummer til sinusrekken til heavisidefunksjonen, altså funksjoner av typen

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t.$$

Kjør koden for noen forskjellige verdier av N, og plott heavisidefunksjonen i samme figur.

5. Den 2π-periodiske utvidelsen av funksjonen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} t + \pi & t < 0 \\ \pi - t & t \geq 0 \end{cases}$$

kalles en trekantbølge. Finn trekantbølgens fourierrekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$

6. Lag et script som plotter partialsummer til fourierrekken til trekantbølgen over.

7. Anta du har en funksjon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Vis at dersom

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin nt$$

kan f også skrives

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{N} d_n \cos(nt + \phi_n).$$

8. Finn trekantbølgens fourierrekke på formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

9. Finn summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots$$

10. Finn summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \cdots$$

11. Den 2π-periodiske utvidelsen av funksjonen $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(t) = t$$

kalles en sagtannbølge. Finn sagtannbølgens fourierrekke på formen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$

12. Finn sagtannbølgens fourierrekke på formen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

13. Finn sagtannbølgens fourierrekke på formen

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{N} d_n \cos(nt + \phi_n).$$

14. Den T-periodiske utvidelsen av funksjonen $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ gitt ved

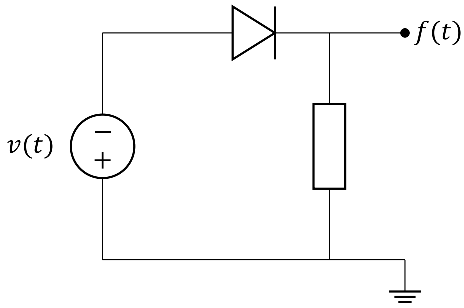
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

kalles en firkantbølge med periode T. Finn fourierrekken til firkantbølgen med $T = 1$.

15. Finn den komplekse fourierrekken til sagtannbølgen med periode $T = 1$.

16. Finn den komplekse fourierrekken til trekantbølgen med periode $T = 1$.

17. Følgende krets kalles en halvbølgelikeretter. Denne er essensiell når noe som trenger likespenning skal forsynes med strøm fra stikkontakten i veggen, som leverer vekselspenning.



Dersom du mater inn et periodisk signal gitt ved

$$v(t) = \sin 100\pi t,$$

(strømmen i veggen alternerer med frekvensen 50 Hz) blir utsignalet den $\frac{1}{100\pi}$-periodiske utvidelsen av

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{200\pi} \leq t \leq 0 \\ \sin 100\pi t & 0 < t < \frac{1}{200\pi} \end{cases}$$

Finn fourierrekken til f.

18. Finn sinusrekken til $f(t) = t(3 - t)$ på intervallet $[0, 3]$.

Med LF

19. Vis at dirichletkjernen kan skrives

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2} t} & t \neq 0 \\ 2N + 1 & t = 2k\pi \end{cases}$$

Løsningsforslag

19. Vi beregner

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} e^{int} &= \frac{e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.\end{aligned}$$

Siden $D_N(0) = 2N+1$, og

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} = \frac{N+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2N+1,$$

kan vi skrive

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} & t \neq 0 \\ 2N+1 & t = 2k\pi \end{cases}$$

Fun fact: Vi kan bruke dirichletkjernen til å skrive partialsummen til en fourierrekke som noe som kalles en konvolusjon.

$$\begin{aligned}2\pi \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} &= \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy\, e^{int} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(t-y)}\, dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(t-y)\, dy = f * D_n.\end{aligned}$$

Konvolusjonsbegrepet er ekstremt viktig i signalbehandling, men vi skal vente til neste semesteret med å se nøye på dette.