Kapittel 4

Vektorrom

I forrige semester lærte vi å løse lineære likningssystemer på en systematisk måte. Men det er ikke nødvendigvis prosessen med å løse likningssystemene som er viktigst - dette kan en datamaskin gjøre på hundrevis av forskjellige måter. Det som er viktig for oss, er selve vektorregningen. Grunnen er veldig enkel - det er mange ting som ikke ser ut som vektorregning ved første øyekast, men som oppfører seg helt identisk med vektorregning allikevel.

Motivasjon

Nå skal jeg preke litt. La oss begynne med

> **Det første store spørsmålet**
>
> Hva er en vektor?

Svaret på dette spørsmålet avhenger av hvem du spør. Noen vil si at det er en pil med lengde og retning som kan brukes til å beskrive for eksempel fart. Noen vil si at det er en liste med tall. En matematiker vil si at det er noe som tilfredsstiller aksiomene for vektorrom, mens en ingeniør vil kanskje si at det er noe du ikke trenger bry deg særlig med så lenge du forstår superposisjonsprinsippet. Alle har rett.

Vektorromskonseptet har som formål å binde sammen ting som ser forskjellig ut, men som oppfører seg veldig likt på noen måter. Her kommer et eksempel. La oss ta følgende vektor i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og skrive den slik:

$$\mathrm{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Du kan tenke på $\mathbb{R}^2$ som alle lineærkombinasjoner av disse to vektorene. Løsningene til

$$\ddot{x} + x = 0$$

er likeledes alle lineærkombinasjoner på formen

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Disse to mengdene likner i den forstand at begge består av alle lineærkombinasjoner av to ting. Dette er superposisjonsprinsippet i et nøtteskall.

> **Superposisjonsprinsippet**
>
> Tar du lineærkombinasjoner av noe som er med i mengden, får du noe som også er med i mengden.

La oss ta et spørsmål til.

> **Det andre store spørsmålet**
>
> Hva er en koordinat?

Det er ingenting spesielt med titallssystemet. Vi har valgt det fordi vi har ti fingre, men det er ingenting feil med andre tallsystemer. En moderne datamaskin er for eksempel utenkelig uten totallssystemet, siden all informasjon lagres med små brytere som står enten av eller på. Det vi tenker på som 7 heter 111 i totallssystemet, men det er bare navnet som er forskjellig. Syv epler er syv epler.

For vektorer finnes en tilsvarende problemstilling. La

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Koordinatene til x er $(1, 2)$, for

$$\mathrm{x} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Men vi kunne like gjerne basert alt på

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

siden alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ også kan skrives som en entydig lineærkombinasjon av disse to:

$$\mathrm{x} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Forskjellen er at det punktet vi prater om, altså det punktet du til vanlig tenker på som

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

har koordinater enten $(1, 2)$ eller $(2, -1)$, alt etter hvilke to vektorer vi baserer alt på. Men det er fortsatt det samme punktet, vi har bare skrevet det som to forskjellige lineærkombinasjoner. og vektene i denne lineærkombinasjonen er det vi tenker på som koordinatene til punktet.

Den samme situasjonen støter vi på for differensiallikningen

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Løsningene er alle lineærkombinasjoner på formen

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

men vi kan jo like gjerne skrive dem som lineærkombinasjoner på formen

$$x(t) = d_1 e^{it} + d_2 e^{-it}.$$

En av løsningene, for eksempel

$$x(t) = 2\cos t + 2\sin t,$$

er den samme som

$$x(t) = (1-i)e^{it} + (1+i)e^{-it},$$

de er bare skrevet på litt forskjellig måte. Hvis vi har lyst til å være skikkelig profesjonelle, kan vi bruke initialverdiene fra et eventuelt initialverdiproblem som koordinater, og skrive

$$x(t) = x_0 \cos t + v_0 \sin t,$$

der $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$, altså startposisjon og startfart.

På samme måte som totallssystemet i noen tilfeller er vesentlig bedre enn titallssystemet, er det i noen situasjoner koordinatsystemer som er bedre enn andre. Vi har allerede sett at det er lettere å regne med komplekse eksponensialfunksjoner en sinus og cosinus, og at man før eller siden må forholde seg til forskjellige koordinatsystemer, er ikke noe å lure på. Det er fremtiden, og dette vil du oppdage i løpet studiet. Så la oss si at vi løsriver oss fra koordinatsystemet vi er vant til. I så fall ser det ut som om koordinatbegrepet henger sammen med konseptet lineærkombinasjon, siden koordinater ser ut til å være det samme som vektene i en lineærkombinasjon.

Det tredje store spørsmålet

Finnes det et matematisk konsept som binder sammen disse greiene?

Svaret er ja. Det heter vektorrom. Noen elsker det og noen hater det. En funksjon kan tenkes på som en vektor. Følg med i neste bolk.

De ti bud

Anta at vi har to vektorer v og w, og to skalarer a og b. Lineærkombinasjonen av v og w med vekter a og b, er

$$a\mathrm{v} + b\mathrm{w}.$$

Denne er satt sammen av vektoraddisjon

$$\mathrm{v} + \mathrm{w}$$

og skalarmultiplikasjon

$$a\mathrm{v}.$$

Disse to operasjonene har du jobbet med siden videregående skole, og er sentrale for vektorrom.

De ti bud

La V være en (ikke tom) mengde med vektorer som kan adderes og skalarmultipliseres, og $\mathbb{K}$ en kropp. Vi sier at mengden V er et vektorrom over $\mathbb{K}$ dersom følgende er tilfredsstilt:

De tre viktige:

1. For alle v, w $\in V$ må

$$\mathrm{v} + \mathrm{w} \in V.$$

2. For alle v $\in V$ må $a \in \mathbb{K}$ må

$$a\mathrm{v} \in V.$$

3. Det skal finnes en vektor, kalt 0, slik at

$$\mathrm{v} + 0 = \mathrm{v}$$

for alle v $\in V$.

De syv ikke fullt så viktige

For alle u, v, w $\in V$, $a, b \in \mathbb{K}$: Addisjonen skal være assosiativ

$$(\mathrm{u} + \mathrm{v}) + \mathrm{w} = \mathrm{u} + (\mathrm{v} + \mathrm{w})$$

og kommutativ

$$\mathrm{u} + \mathrm{v} = \mathrm{v} + \mathrm{u}.$$

Skalarmultiplikasjonen skal være assosiativ

$$a(b\mathrm{v}) = (ab)\mathrm{v}$$

og distributiv både med hensyn på addisjon av skalarer

$$(a + b)\mathrm{v} = a\mathrm{v} + b\mathrm{v}$$

og vektorer

$$a(\mathrm{v} + \mathrm{w}) = a\mathrm{v} + a\mathrm{w}.$$

Vi må også kreve at

$$1\mathrm{v} = \mathrm{v}$$

og at

$$0\mathrm{v} = 0.$$

De tre første budene forteller oss noe om hva et vektorrom må inneholde, mens de resterende syv går på egenskapene til vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon. Det er sjelden en ingeniør støter på problemer med de syv siste, men de tre første er superposisjonsprinsippet i et nøtteskall, så disse er viktige. Vi kommer bare til å trenge $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, så du trenger ikke egentlig skjønne hva en kropp er.

Eksempel 4.1. Vi kan bruke aksiomene til å vise at v og $(-1)\mathrm{v}$ summerer til nullvektoren:

$$0 = 0\mathrm{v} = (1-1)\mathrm{v} = \mathrm{v} + (-1)\mathrm{v}$$

Det er vanlig å skrive $-\mathrm{v}$ istedet for $(-1)\mathrm{v}$. Det er kanskje mest vanlig å sette krav om existens av elementet $-\mathrm{v}$ som et aksiom, og så utlede at $0 = 0\mathrm{v}$, men da blir aksiomene litt vanskeligere å huske. Jeg liker best å gjøre det slik som vi gjør, for det gjør Hanche, og han er ganske smart. △

Eksempel 4.2. Det går an å vise at nullvektoren er entydig, i den forstand at det ikke finnes en annen vektor som tilfredsstiller

$$\mathrm{v} + \mathrm{w} = \mathrm{v}$$

for alle v. La oss anta at en slik w finnes. Hvis vi velger $\mathrm{v} = 0$ i likningen over, ser vi at

$$0 + \mathrm{w} = 0.$$

Men nå kan vi bruke aksiomene, og se at

$$0 = 0 + \mathrm{w} = 0\mathrm{w} + 1\mathrm{w} = (0 + 1)\mathrm{w} = \mathrm{w}.$$

Altså er $\mathrm{w} = 0$. △

Eksempel 4.3. Vi kan bevise at

$$a0 = 0.$$

Vi vet at

$$a\mathrm{v} = a(\mathrm{v} + 0) = a\mathrm{v} + a0,$$

men i forrige eksempel viste vi at nullvektoren er den eneste vektoren med denne egenskapen. Altså må $a0$ være nettopp denne nullvektoren. △

Eksempel 4.4. Det går nå an å vise at dersom

$$a\mathrm{v} = 0$$

må enten $a = 0$ eller $\mathrm{v} = 0$. Dersom $a = 0$, har vi jo et aksiom som sier at $0\mathrm{v} = 0$, så det er greit. Dersom $a \neq 0$, er

$$\mathrm{v} = 1\mathrm{v} = \frac{1}{a}a\mathrm{v} = \frac{1}{a}0 = 0.$$ △

Nå går det an å fortsette på denne måten, og bevise alt mellom himmel og jord. Vel, faktisk ikke alt: Et av Gödels teoremer sier noe sånt som at i alle aksiomatiske systemer finnes det utsagn som er sanne, men som ikke lar seg bevise med aksiomene man har til rådighet. Gödel var veldig skarp, men sultet ihjel etter at han ble enkemann, fordi han nektet å spise annen mat enn den kona lagde til ham.

Arketypen på vektorrom er $\mathbb{R}^n$. Dette er mengden av alle vektorer på formen

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

der alle komponentene er reelle tall. Å vise at $\mathbb{R}^n$ er et vektorrom er trivielt, for aksiomene er avledet fra regnereglene for $\mathbb{R}^n$ du lærte allerede på gymnaset. Styrken i vektorromsabstraksjonen er at det er mange ting som ved første øyekast ikke ser ut som $\mathbb{R}^n$, men som oppfører seg som $\mathbb{R}^n$ allikevel.

Vi skriver $\mathbb{C}^n$ for vektorrommet der vektorene er søylevektorer med komplekse komponenter

$$\mathrm{z} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Du kjenner til mange vektorrom. Vi har bare ikke kalt det vektorrom før. Her er noen enkle eksempler.

Eksempel 4.5. La v være en vektor, for eksempel

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mengden av alle reelle eller komplekse skalarmultipler

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

utgjør et vektorrom. Dette er relativt enkelt å sjekke, for aksiomene for vektorrom er jo avledet fra de vanlige reglene for vektorregning. △

Eksempel 4.6. Alle lineærkombinasjoner av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

utgjør også et vektorrom. Se øvingsoppegget. △

Eksempel 4.7. Løsningene til differensiallikningen

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0$$

er

$$y(t) = a\cos t + b\sin t.$$

Disse utgjør et vektorrom. Det høres sikkert snodig ut, men dette er faktisk akkurat det samme vektorrommet som det i forrige eksempel. △

Eksempel 4.8. Alle polynomer på formen

$$p(x) = bx + c$$

utgjør et vektorrom. Dette er også det samme vektorrommet som i de to foregående eksemplene. △

Det finnes også ting som ved første øyekast kan se ut som vektorrrom, men som ikke er det.

Eksempel 4.9. Mengden av alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$$

utgjør ikke et vektorrom, ihvertfall ikke dersom vi bruker den vanlige vektoraddisjonen og skalarmultiplikasjonen som regneoperasjoner. Kan du se hvilke aksiomer som ikke er tilfredsstilt? △

Underrom

En delmengde av et vektorrom som i seg selv er et vektorrom, kalles et underrom.

Det er relativt enkelt å avgjøre om en delmengde av et vektorrom er et vektorrom. La U være en delmengde av et vektorrom V. De syv aksiomene som går på regnereglene er ikke nødvendig å sjekke, for det ligger i sakens natur at vektorene i U tilfredsstiller de samme regnereglene som de i V, siden vektorer i U også er i V. Med andre ord er det bare nødvendig å sjekke de tre aksiomene som går på innhold. Men sjekker vi at

$$\mathrm{v}, \mathrm{w} \in U \longrightarrow \mathrm{v} + \mathrm{w} \in U$$
$$\mathrm{v} \in U \longrightarrow c\mathrm{v} \in U$$

kommer nullvektoren med i U av seg selv siden $0\mathrm{v} = 0$.

Å sjekke om noe er et underrom

En delmengde U av vektorrommet V er et underrom hvis og bare hvis

$$\mathrm{v}, \mathrm{w} \in U \longrightarrow \mathrm{v} + \mathrm{w} \in U$$
$$\mathrm{v} \in U \longrightarrow c\mathrm{v} \in U$$

Eksempel 4.10. Alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er et underrom av vektorrommet av alle lineærkombinasjoner av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$ △

Eksempel 4.11. Alle konstante funksjoner er et underrom av vektorrommet av alle polynomer på formen

$$p(x) = bx + c.$$ △

Dimensjon

Vi sier at vektorer $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$ er lineært uavhengige dersom

$$c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n = 0$$

impliserer at

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Merk at en lineært uavhengig vektormengde ikke kan inneholde nullvektoren.

Lineær uavhengighet er praktisk

Dersom en vektor w kan skrives som en lineærkombinasjon av de lineært uavhengige vektorene $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$, kan dette kun gjøres på én måte.

Bevis. Anta at vi kan skrive både

$$\mathrm{w} = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n$$

og

$$\mathrm{w} = d_1\mathrm{v}_1 + d_2\mathrm{v}_2 + \cdots + d_n\mathrm{v}_n.$$

I så fall er

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{w} - \mathrm{w} \\ &= (c_1 - d_1)\mathrm{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathrm{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathrm{v}_n. \end{aligned}$$

Men $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$ er lineært uavhengige, så likningen over impliserer at $c_k = d_k$ for alle k. □

Dersom alle $\mathrm{w} \in \mathrm{V}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av en lineært uavhengig vektormengde $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$, sier vi at $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$ spenner ut V.

Basis

En vektormengde som spenner ut vektorrommet V, kalles en basis for V.

Basis er et sentralt verktøy.

Et vektorrom har en basis

Et vektorrom har enten en endelig basis, eller en uendelig følge av lineært uavhengige vektorer.

Bevis. Se her. □

Hanche kaller det neste teoremet for plassmangelteoremet, for det forteller noen om hvor mange lineært uavhengige vektorer det er plass til i et vektorrom.

Plassmangelteoremet

La $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$ være en basis for V, og la $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \dots \mathrm{w}_m$ være en lineært uavhengig vektormengde i V. Da er $m \leq n$.

Bevis. Anta $m > n$. Siden $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$ er en basis for V, kan vi skrive

$$\mathrm{w}_1 = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n.$$

Siden $\mathrm{w}_1 \neq 0$, må minst en av koeffisientene c_k være ulik 0. La oss anta at $c_1 \neq 0$. (Hvis ikke dette er tilfelle, bytter vi bare litt på rekkefølgen i $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$.) Men i så fall kan vi skrive

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{w}_1 - \frac{c_2}{c_1}\mathrm{v}_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_1}\mathrm{v}_n,$$

og dette betyr at $\mathrm{w}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_n$ er en basis for V, for et vilkårlig element $\mathrm{u} \in \mathrm{V}$ vil alltid kunne skrives

$$\begin{aligned} \mathrm{u} =& d_1\mathrm{v}_1 + d_2\mathrm{v}_2 + \cdots + d_n\mathrm{v}_n \\ =& d_1\left(\mathrm{w}_1 - \frac{c_2}{c_1}\mathrm{v}_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_1}\mathrm{v}_n\right) \\ & + d_2\mathrm{v}_2 + \cdots + d_n\mathrm{v}_n \\ =& d_1\mathrm{w}_1 + \left(d_2 - d_1\frac{c_2}{c_1}\right)\mathrm{v}_2 + \cdots + \left(d_n - d_1\frac{c_n}{c_1}\right)\mathrm{v}_n. \end{aligned}$$

Vi fortsetter på samme måte. Det er nå klart at vi kan skrive (med nye koeffisienter d_1 og c_k)

$$\mathrm{w}_2 = d_1\mathrm{w}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n.$$

Her må minst en av koeffisientene c_k være ulik null, for w_2 er ikke en skalarmultippel av w_1. La oss anta at $c_2 \neq 0$, hvis ikke, bytt rekkefølge på $\mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3 \dots \mathrm{v}_n$. Nå kan vi skrive

$$\mathrm{v}_2 = -\frac{d_1}{c_2}\mathrm{w}_1 + \mathrm{w}_2 - \frac{c_3}{c_2}\mathrm{v}_3 - \cdots - \frac{c_n}{c_2}\mathrm{v}_n,$$

og det samme argumentet som ovenfor forteller oss at $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{v}_3 \dots \mathrm{v}_n$ er en basis for V.
Vi tar en runde til. Vi kan skrive (nok en gang med nye koeffisienter)

$$\mathrm{w}_3 = d_1\mathrm{w}_1 + d_2\mathrm{w}_2 + c_3\mathrm{v}_3 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n,$$

og her må minst en c_k være ulik null, for $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2$ og w_3 er jo lineært uavhengige. Samme prosess gir nok en gang at $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_3\ \mathrm{v}_4 \dots \mathrm{v}_n$ er en basis for V, og gjentar vi dette igjen og igjen, vil konklusjonen være at $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \dots \mathrm{w}_n$ er en basis for V.
Men dersom dette er sant, kan vi skrive

$$\mathrm{w}_{n+1} = c_1\mathrm{w}_1 + c_2\mathrm{w}_2 + \cdots + c_n\mathrm{w}_n,$$

og dette går på tverke med den lineære uavhengigheten til $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \dots \mathrm{w}_m$. Altså kan ikke $m > n$. □

Nå kan vi snart definere dimensjon dere!

To endelige basiser for ett og samme vektorrom må bestå av samme antall vektorer.

Bevis. Anta at vi har to basiser $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \dots \mathrm{n}_n$ og $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \dots \mathrm{w}_m$. Siden både $n \leq m$ og $m \leq n$, må vi ha $n = m$. □

NÅ kan vi definere dimensjon!

Dersom et vektorrom har en endelig basis, sier vi at vektorrommet er endeligdimensjonalt. To forskjellige basiser for et og samme endeligdimensjonale vektorrom må inneholde det samme antall vektorer. Dette antallet kalles vektorrommets dimensjon.

Eksempel 4.12. $\mathbb{R}^n$ et n-dimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$. En basis er de n vektorene

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \qquad \triangle$$

Eksempel 4.13. Standardbasisen for $\mathbb{R}^n$ er også en basis for $\mathbb{C}^n$. Det er lett å se at alle elementer i $\mathbb{C}^n$ kan skrives som en entydig lineærkombinasjon av elementene i basisen:

$$\begin{aligned} \mathrm{z} &= \begin{pmatrix}a_1 + b_1 i\\a_2 + b_2 i\\\vdots\\a_n + b_n i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix} \\ &= z_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + z_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + z_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \triangle$$

Eksempel 4.14. Man kan også se på $\mathbb{C}^n$ som et vektorrom over $\mathbb{R}$, men da er ikke standardbasisen for $\mathbb{R}^n$ en basis for $\mathbb{C}^n$. En basis er

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix}i\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\i\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\i\end{pmatrix}, \end{gathered}$$

og dimensjonen er $2n$ istedet for n. En tilfeldig vektor z i $\mathbb{C}^n$ kan skrives

$$\begin{aligned} \mathrm{z} &= \begin{pmatrix}a_1 + b_1 i\\a_2 + b_2 i\\\vdots\\a_n + b_n i\end{pmatrix} \\ &= a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \\ &+ b_1\begin{pmatrix}i\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\i\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + b_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\i\end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Eksempel 4.15. $\mathbb{Q}^n$ et vektorrom over $\mathbb{Q}$. Selv om vi har sagt at vi har gjort lineær algebra på $\mathbb{R}^n$ til nå, har vi i praksis operert på $\mathbb{Q}^n$. Ikke et eneste matriseeksempel har involvert $\sqrt{2}$. △

Eksempel 4.16. De hele tallene $\mathbb{Z}$ er ikke en kropp, så $\mathbb{Z}^n$ er ikke et vektorrom. △

Eksempel 4.17. Alle polynomer på formen

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

utgjør et vektorrom med dimensjon 3. En basis er 1, x, x^2. Hvordan sr vi det? Det er klart at alle polynomer på formen

$$ax^2 + bx + c$$

kan skrives som en lineærkombinasjon av $1, x, x^2$. (Du har jo brukt denne basisen til å definere hva du mener med et andregradspolynom siden første klasse på gymnaset.) De tre elementene er også lineært uavhengige, for om vi krever

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{for alle } t$$

må $a = b = c = 0$. En annen basis er de tre første Legendrepolynomene 1, x og $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Det er litt mer regning å vise, men grunnstegene er de samme. △

Eksempel 4.18. Løsningene til differensiallikningen

$$\ddot{y} + y = 0$$

utgjør et vektorrom over $\mathbb{C}$ med dimensjon 2. En basis er $\sin t$, $\cos t$, og en annen er e^{it}, e^{-it}. △

Eksempel 4.19. Alle matriser på formen

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$

utgjør et vektorrom med dimensjon 4. En pen basis er de fire matrisene

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad \triangle$$

Eksempel 4.20. Alle kontinuerlige funksjoner, alle deriverbare funksjoner, alle analytiske funksjoner, og så videre, er eksempler på vektorrom med uendelig mange dimensjoner. Husk at en funksjon er noe som på en entydig måte tilordner et element i en mengde til et element i en annen mengde. Derfor kan du tenke på en funksjon som en uendelig lang søylevektor der komponentene er funksjonsverdiene til funksjonen på alle punktene i $\mathbb{R}$. △

Koordinater

I forrige avsnitt var rekkefølgen på basiselementene litt ad hoc. Fra nå av skal vi skrive basiselementene i en bestemt rekkefølge, for da kan basisen brukes til å definere koordinater.

Nå kan vi definere koordinater!

La $(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_n)$ være en basis for et vektorrom, og la

$$\mathrm{w} = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n.$$

Vi sier at skalarene $(c_1, c_2, ..., c_n)$ er koordinatene til w i basisen $(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, ..., \mathrm{v}_n)$.

Eksempel 4.21. Vi skriver jo at z_1, z_2,...z_n er koordinatene til z fordi

$$\begin{aligned} \mathrm{z} &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + z_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \triangle$$

Eksempel 4.22. Koordinatene til

$$p(x) = x^2 + 2x + 1$$

i basisen $(x^2, x, 1)$ er $(1, 2, 1)$. Koordinatene i basisen

$$\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1), x, 1\right)$$

er $(2/3, 2, 4/3)$, siden

$$p(x) = x^2 + 2x + 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) + 2x + \frac{4}{3}. \qquad \triangle$$

Eksempel 4.23. Koordinatene til vektoren

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

i vektorrommet av 2×2-matriser, er (a, b, c, d), siden

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Lineæravbildninger

Den vanligste funksjonen mellom vektorrom kalles lineæravbildning. Vanlige synonymer er lineærtransformasjon og lineæroperator.

Superposisjonsprinsippet på matematikermåten

La V og W være vektorrom. En lineæravbildning er en funksjon $T : V \to W$ slik at

$$T(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = T(\mathrm{x}) + T(\mathrm{y})$$
$$T(c\mathrm{x}) = cT(\mathrm{x})$$

Arketypen på en lineæravbildning, er matrise-vektorproduktet.

Eksempel 4.24. La A være en $n \times m$-matrise, og x og y $m \times 1$-vektorer. Vi vet jo fra forrige semester at

$$A(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = A\mathrm{x} + A\mathrm{y}$$

og at

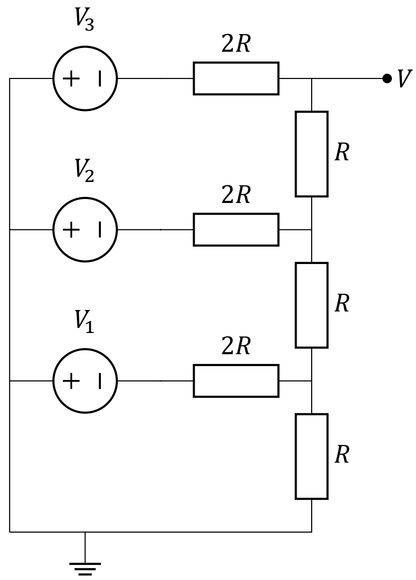
$$A(c\mathrm{x}) = cA\mathrm{x}.$$

En lineæravbildning er bare en generalisering av denne operasjonen, og vi kan definere $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ved

$$T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}. \qquad \triangle$$

Folk som driver på med andre ting en matematikk, for eksempel fysikk eller elektro, kaller lineæravbildningens to definerende egenskaper for superposisjonsprinsippet.

Eksempel 4.25. En digital-til-analog-konverter består av en krets som ser slik ut:



Kretsen fungerer slik at spenningsnivåene V_1, V_2 og V_3 definerer en binærkode ved at de har enten høy (5V) eller lav (0V) spenning, og så får man ut en spenning V på mellom 0 og 5 volt. La oss representere $V_1V_2V_3$ som en vektor med nullere og enere. Tabellen blir noe slikt:

$V_1V_2V_3$	V
0 0 0	0
0 0 1	0.625
0 1 0	1.25
0 1 1	1.875
1 0 0	2.5
1 0 1	3.125
1 1 0	3.75
1 1 1	4.375

Nå er det slik at siden denne typen resistiv krets modelleres av lineæralgebra, er superposisjonsprinsippet implisert av lineæralgebramodellen. Siden siden matrise-vektorproduktet er en lineæravbildning, vil også kretsen oppføre seg som en lineæravbildning. La for eksempel

$$\mathrm{x} = (0, 1, 0)$$

og

$$\mathrm{y} = (1, 0, 1).$$

Da er

$$\begin{aligned}T(\mathrm{x}+\mathrm{y}) &= T(\mathrm{x})+T(\mathrm{y})\\ &= T(0,1,0)+T(1,0,1) = \\ T(1,1,1) &= 4.375.\end{aligned}$$

Til slutt må vi være litt forsiktige her, for det er noen tilleggsregler som gjelder fordi dette er elektronikk i praksis. Man vil aldri legge sammen for eksempel vektorene $(0,1,0)$ og $(0,1,1)$, for dette korresponderer til å sette V_2 til 10V, og det gjør man ikke. △

Eksempel 4.26. Egenskapen

$$T(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = T(\mathrm{x})+T(\mathrm{y})$$

er sentral for superposisjonsprinsippet, men en vanlig kilde til misforståelse. I noen fagfelt, for eksempel statistikk, bruker man ordet 'lineær' om en funksjon som beskriver en rett linje, altså funksjoner på formen $p(x) = ax + b$. For denne funksjonen gjelder jo ikke at

$$p(x+y) = p(x)+p(y)$$

med mindre $b = 0$, så ordet lineær har for dem en helt annen betydning. Dette er greit å vite om. △

Eksempel 4.27. Venstresiden i differensiallikningen

$$\ddot{y} + y = 0$$

er en lineæravbildning

$$T(y) = \ddot{y} + y.$$

Dette er matematikerens måte å si at superposisjonsprinsippet gjelder. Når du så likningen første gang, brukte læreren din egenskapene til lineæravbildninger, og sa antagelig noe slikt som at 'cos t er jo selvfølgelig en løsning, men det er sin t også, og så er det slik at da er faktisk $a\cos t + b\sin t$ en løsning'. Når det er snakk om differensiallikninger, bruker man ofte ordet lineæroperator. △

Eksempel 4.28. Setter man $c = 0$ i

$$T(c\mathrm{v}) = cT(\mathrm{v}),$$

ser man at for en vilkårlig lineærtransformasjon $T : V \to W$, må

$$T(0) = 0.$$

Her er det underforstått at 0 på venstre side er nullvektoren i V, mens 0 på høyre side er nullvektoren i W. △

Noe litt tekniske greier

En lineæravbildning $T : V \to W$ er surjektiv dersom det for enhver $\mathrm{w} \in W$ finnes en $\mathrm{v} \in V$ slik at $T(v) = w$.

En lineæravbildning $T : V \to W$ som er både injektiv og surjektiv, kalles en isomorfi. Dersom det finnes en isomorfi mellom V og W, sier vi at V og W er isomorfe. Dette betyr at det i bunn og grunn er snakk om samme vektorrom. To isomorfe vektorrom kan se veldig forskjellige ut. Vektorrom er isomorfe dersom de har samme dimensjon.

Eksempel 4.29. Vektorrommet av løsninger til

$$\ddot{y} + y = 0$$

er isomorft med både $\mathbb{R}^2$. En isomorfi er for eksempel

$$T(a\cos t + b\sin t) = \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}.$$

Disse vektorrommene er også isomorfe med $\mathbb{C}^2$, alle polynomer på formen $ax + b$, og $\mathbb{C}$, dersom du ser på det som et todimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$. △

To viktige vektorrom

La $T : V \to W$ være en lineæravbildning. Mengden av alle $\mathrm{v} \in V$ slik at $T\mathrm{v} = 0$, kalles kjernen til T. Mengden av alle $\mathrm{w} \in W$ slik at $T\mathrm{v} = \mathrm{w}$, kalles bildet til T.

Kjernen og bildet gir opphav til to viktige vektorrom.

De er faktisk vektorrom

Kjernen til $T : V \to W$ er et underrom av V, og bildet er et underrom av W.

Bevis. Se øvingsopplegg. □

Eksempel 4.30. Dersom T er gitt ved et matrise-vektor-produkt $A\mathrm{x} = \mathrm{y}$, er kjernen til T noe som kalles nullrommet til A. Dette er alle vektorer slik at

$$A\mathrm{x} = 0,$$

og man finner en basis for dette rommet ved å finne alle løsninger av dette lineære likningssystemet.
Bildet til T kalles søylerommet, og er alle vektorer på formen

$$A\mathrm{x},$$

altså alle mulige lineærkombinasjoner av matrisens søyler. En basis for søylerommet kan man få ved radreduksjon. Hvis man plukker ut søyleindeksene til de søylene som ender opp med å ha pivotelementer etter radreduksjonen, vil de søylene med samme indeks i A være en basis for søylerommet. Se øvingsopplegget. △

Eksempel 4.31. Dersom $T : V \to W$ er gitt ved en operasjon som gjør et eller annet, så finnes det alltid en matrise som gjør det samme med vektorer fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, der n er dimensjonen til V, og m er dimensjonen til W. La for eksempel

$$T(y) = \ddot{y} + y,$$

og la både V og W være vektorrommet av polynomer på formen $p(x) = ax^2 + bx + c$. Dette rommet er isomorft med $\mathbb{R}^3$, og derfor finnes det en 3×3-matrise som gjør det samme med vektorer i $\mathbb{R}^3$ som T gjør med andre ordens polynomer. Hvis vi anvender T på $ax^2 + bx + c$, får vi

$$\begin{aligned}T(ax^2+bx+c) =& aT(x^2)+bT(x)+cT(1)\\ =& a(2+x^2)+bx+c\\ =& ax^2+bx+2a+c.\end{aligned}$$

En matrise som gjør det samme mellom vektorer i $\mathbb{R}^3$, er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siden

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a + c \end{pmatrix}.$$

Matrisen A kalles lineæravbildningens standardmatrise, og kan enkelt finnes ved å se på hva lineæravbildningen gjør med vektorene i basisen man har valgt for V. I dette tilfellet er basisen $(x^2, x, 1)$. La oss begynne med x^2. Siden $T(x^2) = x^2 + 2$, ønsker vi en matrise A slik at

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

og dette impliserer at den første søylen i A må være nettopp

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Fortsetter man med $T(x)$ og $T(1)$, detter de andre søylene ut. △

Eksempel 4.32. Vi kan finne standardmatrisen til lineæravbildningen T som speiler punkter om x-aksen i $\mathbb{R}^2$. Speilingen er definert av at

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

slik at matrisen blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$ △

Eksempel 4.33. Standardmatrisen til lineæravbildningen som roterer punkter vinkelen θ mot klokken, er gitt ved

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

siden

$$A_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

og

$$A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$ △

Oppgaver

Med LF

1. La v være en vektor, for eksempel

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sjekk at alle skalarmultipler av denne utgjør et vektorrom.

2. La v og w være to vektorer, for eksempel

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathrm{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sjekk at alle lineærkombinasjoner av disse utgjør et vektorrom.

3. Mengden av alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$$

utgjør ikke et vektorrom, ihvertfall ikke dersom vi bruker den vanlige vektoraddisjonen og skalarmultiplikasjonen som regneoperasjoner. Kan du se hvilke aksiomer som ikke er tilfredsstilt?

Uten LF

4. Vis at $\sin t$ og $\cos t$ er lineært uavhengige vektorer.

5. Differensiallikningen

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0$$

har generell løsning

$$y(t) = A \cos t + B \sin t.$$

Vis at løsningene utgjør et vektorrom.

6. Løsningene kan like gjerne skrives

$$y(t) = Ce^{it} + De^{-it}.$$

Finn lineæravbildningen T slik at

$$T \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

7. Dersom A og B er reelle tall, kan løsningen skrives

$$y(t) = a \sin(t + \phi).$$

Er $F(a, \phi) = (A, B)$ en lineærtransformasjon?

8. Finn en basis for søylerommet til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. Finn en basis for nullrommet til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

og vis at dette er et vektorrom.

10. Vis at løsningene til differensiallikningen

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 1$$

ikke utgjør et vektorrom.

11. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løs $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, og vis at dette ikke er et vektorrom.

12. Vis at operatoren

$$F(y) = \ddot{y} + y$$

er en lineæroperator.

13. Vis at mengden av alle andregradspolynomer er et vektorrom med dimensjon 3.

14. Vis at kjernen til $T : V \to W$ er et underrom av V, og at bildet er et underrom av W.

15. Vis at en lineært uavhengig vektormengde ikke kan inneholde nullvektoren.

16. Vis at rommet av kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$ er et vektorrom med uendelig mange dimensjoner.

Løsningsforslag

1. La V være mengden av alle skalarmutlipler av v, altså alle vektorer på formen

$$a\mathrm{v} = a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Vektoraddisjonen $\mathrm{v} + \mathrm{w}$ tar vi som vanlig vektoraddisjon, slik vi lærte på skolen, og tilsvarende valg gjøres for skalarmultiplikasjon. Vi må nå sjekke alle aksiomene.
La oss begynne med nullvektoren. Vektoren

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

er med i V, siden den er en skalarmultippel av v:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

La oss definere

$$0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Vi har nå at

$$\mathrm{v} + 0 = \mathrm{v}$$

for alle $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$, og at

$$0 \cdot \mathrm{v} = 0.$$

Siden

$$a\mathrm{v} + b\mathrm{v} = b\mathrm{v} + a\mathrm{v}$$

ser vi at kommutativitet for vektoraddisjon holder. Assosiativitet sjekkes på samme vis. Det samme gjelder regnereglene for skalarmultiplikasjon, altså assosiativitet, distributivitet, og at $1\mathrm{v} = \mathrm{v}$.
Vi må til slutt å sjekke at V er lukket under vektoraddisjon. Dette følger av at summen av to skalarmultipler av en og samme vektor, også er en skalarmultippel av den samme vektoren:

$$a\mathrm{v} + b\mathrm{v} = (a + b)\mathrm{v}.$$

Å sjekke at V er lukket under skalarmultiplikasjon, er sant per definisjon, siden vi har definert V som alle skalarmultipler av vektoren v.

2. Vi må jo egentlig sjekke alle aksiomene her, Men jobben med å sjekke aksiomene som går på regneregler, er identisk med jobben som ble gjort i forrige oppgave, så vi må tenke over hva som er nytt.
Det som er annerledes, er egentlig bare spørsmålet om hvorvidt V er lukket under de to regneoperasjone. Anta x og y er vektorer i V. Er $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ også i V? La oss skrive $\mathrm{x} = a\mathrm{v} + b\mathrm{w}$ og $\mathrm{y} = c\mathrm{v} + d\mathrm{w}$. Men da er

$$\mathrm{x} + \mathrm{y} = a\mathrm{v} + b\mathrm{w} + c\mathrm{v} + d\mathrm{w} = (a + c)\mathrm{v} + (b + d)\mathrm{w},$$

som er en lineærkombinasjon av v og w, så $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ er altså med i V. Tilsvarende ser vi at

$$e\mathrm{x} = ea\mathrm{v} + eb\mathrm{w}$$

slik at $e\mathrm{x}$ er en lineærkombinasjon av v og w, og følgelig med i V.

3. Det første aksiomet som mangler, er det om nullvektoren. Det finnes ingen vektor w som har den egenskap at

$$\mathrm{v} + \mathrm{w} = \mathrm{v}.$$

For det andre er ikke denne mengden lukket under vanlig vektoraddisjon, siden

$$\begin{pmatrix}a\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\4\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}c\\2\end{pmatrix}.$$

For det tredje er den ikke lukket under den vanlige skalarmultiplikasjonen, siden

$$b\begin{pmatrix}a\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ab\\4b\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}c\\2\end{pmatrix}$$

så lenge $b \neq 1$.