Kapittel 5

Indreproduktrom

Vektorrom kan, i tillegg til vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon, ha forskjellige typer produkt mellom vektorer. I dette kapitlet skal vi se på et av de viktigste.

Indreprodukt

Et indreprodukt er noe der du putter inn to vektorer og får ut et tall. Dersom dette tallet er reellt, sier vi at indreproduktet er reelt. Indreproduktet kan også være komplekst, men dette venter vi litt med.
Dette er en generalisering av skalarproduktet du lærte om på videregående skole. Vi skriver gjerne

$$(\mathrm{v}, \mathrm{w})$$

og følgende aksiomer skal gjelde.

Reelt indreprodukt

La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$, la u, v og w være vektorer, og a og b reelle tall. Indreproduktet skal være symmetrisk

$$(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = (\mathrm{w}, \mathrm{v}),$$

lineært i andre argument

$$(\mathrm{u}, a\mathrm{v} + b\mathrm{w}) = a(\mathrm{u}, \mathrm{v}) + b(\mathrm{u}, \mathrm{w})$$

og positivt definitt

$$(\mathrm{v}, \mathrm{v}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathrm{v} \neq 0.$$

Et vektorrom med et indreprodukt kalles et indreproduktrom.

Eksempel 5.1. Indreproduktet er lineært også i første argument:

$$\begin{aligned}(a\mathrm{v} + b\mathrm{w}, \mathrm{u}) &= (\mathrm{u}, a\mathrm{v} + b\mathrm{w}) \\ &= a(\mathrm{u}, \mathrm{v}) + b(\mathrm{u}, \mathrm{w}) \\ &= a(\mathrm{v}, \mathrm{u}) + b(\mathrm{w}, \mathrm{u})\end{aligned}$$

Siden det reelle indreproduktet er lineært i begge argumenter, sier vi gjerne at det er bilineært. Det går like greit å sette opp som aksiom at indreproduktet er lineært i første faktor, og så utlede at det er lineært i andre faktor. Vvilken vei man gjør det har ingenting å si for reelle indreprodukt, men det har litt å si for komplekse indreprodukt som vi skal se på lenger ned. △

Eksempel 5.2.

$$(\mathrm{v}, 0) = (\mathrm{v}, 0\mathrm{v}) = 0(\mathrm{v}, \mathrm{v}) = 0. \qquad \triangle$$

Eksempel 5.3. Fra videregående skole husker du forhåpentligvis skalarproduktet

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{w}$$

mellom vektorer i $\mathbb{R}^2$. Dette er et indreprodukt. Det finnes to formler for å beregne dette. Den ene ser slik ut:

$$\begin{aligned}\mathrm{v} \cdot \mathrm{w} = \|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\| \cos\theta = \\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\cos\theta\end{aligned}$$

der θ er vinkelen mellom v og w, og den andre slik:

$$\mathrm{v} \cdot \mathrm{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

At disse to uttrykkene gir det samme tallet, følger av cosinussetningen, se øvingsopplegget. At uttrykket definerer et indreprodukt, er også lett å sjekke fra den siste formelen, for det er egenskapene til dette uttrykket som har gitt opphav til aksiomene for indreprodukt. △

Eksempel 5.4. I $\mathbb{R}^n$ kan vi bruke matriseregningsregler, og skrive skalarproduktet mellom to søylevektorer v og w som $\mathrm{v} \cdot \mathrm{w} = \mathrm{v}^T \mathrm{w}$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n. \qquad \triangle\end{aligned}$$

Ortogonalitet mellom vektorer

To vektorer v og w er ortogonale dersom $(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = 0$.

Merk at nullvektoren står ortogonalt på alle vektorer. Merk også at dersom $(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = 0$, gir det første aksiomet at $(\mathrm{w}, \mathrm{v}) = 0$.

Eksempel 5.5. I $\mathbb{R}^2$ er v og w ortogonale dersom vinkelen mellom dem er $\pi/2$. △

Eksempel 5.6. Vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er ortogonale. △

Eksempel 5.7. La V være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Dette rommet kalles gjerne $C[-\pi, \pi]$. Vi definerer indreproduktet

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx.$$

Vi sjekker at aksiomene holder. Dette indreproduktet er symmetrisk, siden

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)f(x)\, dx = (g, f),$$

og lineært i andre faktor

$$\begin{aligned}(f, ag + bh) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(ag(x) + bh(x)\right)\, dx \\ &= a\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx + b\int_{-\pi}^{\pi} f(x)h(x)\, dx \\ &= a(f, g) + b(f, h).\end{aligned}$$

Siden $f^2 \geq 0$, ser vi også at

$$(f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx > 0$$

dersom f ikke er nullfunksjonen. Vi har tidligere sett at funksjonene $\sin nt$ og $\cos nt$ er ortogonale på dette vektorrommet. △

Lengde

Lengden til en vektor v er gitt ved $\|\mathrm{v}\| = \sqrt{(\mathrm{v}, \mathrm{v})}$.

Eksempel 5.8. Vektoren $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{w}}{\|\mathrm{w}\|}$ har lengde 1 for alle $\mathrm{w} \neq 0$. For eksempel er

$$\left\|\frac{\cos nt}{\pi}\right\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\, dt = 1$$

for alle n. △

Pytagoras' teorem om rettvinklede trekanter i $\mathbb{R}^2$ gjelder også for indreproduktrom.

Pytagoras

Vektorene v og w er ortogonale hvis og bare hvis

$$\|\mathrm{v} + \mathrm{w}\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|\mathrm{w}\|^2.$$

Bevis. Vi beregner

$$\begin{aligned}\|\mathrm{v} + \mathrm{w}\|^2 &= (\mathrm{v} + \mathrm{w}, \mathrm{v} + \mathrm{w}) \\ &= (\mathrm{v}, \mathrm{v}) + (\mathrm{v}, \mathrm{w}) + (\mathrm{w}, \mathrm{v}) + (\mathrm{w}, \mathrm{w}) \\ &= \|\mathrm{v}\|^2 + (\mathrm{v}, \mathrm{w}) + (\mathrm{w}, \mathrm{v}) + \|\mathrm{w}\|^2 \\ &= \|\mathrm{v}\|^2 + 2(\mathrm{v}, \mathrm{w}) + \|\mathrm{w}\|^2.\end{aligned}$$

Dersom $(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = 0$, er det klart at

$$\|\mathrm{v} - \mathrm{w}\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|\mathrm{w}\|^2.$$

Dersom

$$\|\mathrm{v} - \mathrm{w}\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|\mathrm{w}\|^2,$$

kan vi trekke disse fra likningen over, og se at

$$-2(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = 0,$$

som betyr at v og w er ortogonale. □

Vi sier at vektorene $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_n$ er innbyrdes ortogonale dersom

$$(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j) = 0$$

for alle i og j. Dersom i tillegg $\|\mathrm{v}_j\| = 1$ for alle j, sier vi at vektorene er ortonormale. Det er lett å se at en innbyrdes ortogonal vektormengde må være lineært uavhengig. Hvis vi tar indreproduktet mellom v_k og begge sider av likningen

$$c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n = 0$$

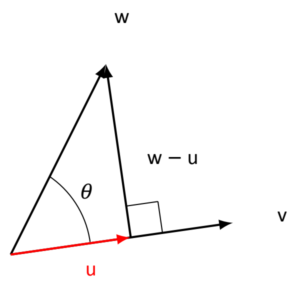
ser vi at $c_k = 0$ for alle k.

Projeksjon

I dette avsnittet skal vi ta for oss en viktig lineæravbildning, nemlig projeksjon. La oss begynne med å se på dette i $\mathbb{R}^2$.

Et viktig spørsmål

Hvordan kan vi skrive vektoren u i figuren under?



Hva er projeksjon?

Svaret:

Vi kan begynne med å utlede en formel for lengden:

$$\|\mathrm{u}\| = \|\mathrm{w}\|\cos\theta = \frac{\|\mathrm{v}\|}{\|\mathrm{v}\|}\|\mathrm{w}\|\cos\theta = \frac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}}{\|\mathrm{v}\|}.$$

Lengden $\|\mathrm{u}\|$ kalles w sin skalarprojeksjon på v. Vi kan så bruke denne skalarprojeksjonen til å skrive

$$\mathrm{u} = \|\mathrm{u}\|\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|} = \frac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}}{\|\mathrm{v}\|^2}\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}}{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}\mathrm{v}.$$

Vektoren u kalles gjerne w sin komponent i retningen til v, eller vektorprojeksjonen av w på v. Komponenten til w ortogonalt på v er og

$$\mathrm{w} - \mathrm{u}.$$

Eksempel 5.9. Vektoren

$$\mathrm{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sin komponent i retningen gitt av

$$\mathrm{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er:

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}}{\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}}\mathrm{v} = \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Komponenten ortogonalt på v er

$$\mathrm{w} - \mathrm{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad \triangle$$

Ortogonal projeksjon

La V være et vektorrom med et indreprodukt. Inspirert av de geometriske betraktningene over, definerer vi for $\mathrm{v} \neq 0$ en lineæravbildning

$$P_{\mathrm{v}}(\mathrm{w}) = \frac{(\mathrm{w}, \mathrm{v})}{(\mathrm{v}, \mathrm{v})}\mathrm{v},$$

kalt ortogonal projeksjon på v.

Å se at dette er en lineæravbildning, er ikke så vanskelig, se øvingsopplegg. Man kan tenke at $P_{\mathrm{v}}(\mathrm{w})$ er skyggen w kaster på v dersom man lyser på w med en lommelykt, og lommelykten står uendelig langt borte, rett over w, og vinkelrett på v.

Noen vanskelige teoremer

Ortogonal basis

Et endeligdimensjonalt vektorrom har en ortogonal basis.

Bevis. La V være vektorrommet, og la v_1, v_2, ...,v_n være en basis for V. Vi skal lage oss en ortogonal basis $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \cdots, \mathrm{u}_n$ for V. Prosedyren kalles Gram-Schmidts metode, og går som følger.
Husk at ingen av vektorene $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_n$ kan være null. Vi begynner med å definere

$$\mathrm{u}_1 = \mathrm{v}_1.$$

Vektoren u_1 ikke nødvendigvis ortogonal på v_2, men det er lett å sjekke at vektoren

$$\mathrm{u}_2 = \mathrm{v}_2 - P_{\mathrm{u}_1}\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{(\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2)}{(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1)}\mathrm{u}_1$$

er det:

$$\begin{aligned}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2) &= \left(\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2 - \frac{\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2}{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1}\mathrm{u}_1\right) \\ &= (\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2) - \frac{(\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2)}{(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1)}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1) \\ &= (\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2) - (\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2) = 0\end{aligned}$$

Det er også lett å se at u_2 ikke er nullvektoren. Dersom så var tilfelle, impliserer

$$\mathrm{v}_2 - \frac{(\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2)}{(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1)}\mathrm{u}_1 = 0$$

at u_1 og v_2 er lineært avhengige, noe som ikke er sant. Siden u_1 og u_2 er ortognonale, og ingen av dem nullvektoren, er de lineært uavhengige. De spenner ut det samme rommet som v_1 og v_2, for dersom w kan skrives som en lineærkombinasjon av v_1 og v_2, kan w også skrives som en lineærkombinasjon av u_1 og u_2:

$$\begin{aligned}\mathrm{w} &= c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 \\ &= c_1\mathrm{u}_1 + c_2\left(\mathrm{u}_2 + \frac{(\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_2)}{(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1)}\mathrm{u}_1\right)\end{aligned}$$

På samme vis kan vi sjekke at vektoren

$$\begin{aligned}\mathrm{u}_3 &= \mathrm{v}_3 - P_{\mathrm{u}_1}\mathrm{v}_3 - P_{\mathrm{u}_2}\mathrm{v}_3 \\ &= \mathrm{v}_3 - \frac{(\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_3)}{(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_1)}\mathrm{u}_1 - \frac{(\mathrm{u}_2, \mathrm{v}_3)}{(\mathrm{u}_2, \mathrm{u}_2)}\mathrm{u}_2\end{aligned}$$

ikke er nullvektoren, står ortogonalt på både u_1 og u_2, og sammen med u_1 og u_2 spenner ut det samme rommet som v_1, v_2 og v_3. Vi kan nå fortsette slik, og definere rekursivt

$$\begin{aligned}\mathrm{u}_k &= \mathrm{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mathrm{u}_j}\mathrm{v}_k \\ &= \mathrm{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\mathrm{u}_j, \mathrm{v}_k)}{(\mathrm{u}_j, \mathrm{u}_j)}\mathrm{u}_j,\end{aligned}$$

og så sjekke ved induksjon at vi får en ortogonal basis for V. □

Dersom en ortogonal mengde u_1, u_2, ...,u_n spenner ut et rom V, sier vi at mengden er en ortogonal basis for V. Hvis vi har en ortogonal basis for et rom, er det veldig lett å finne en vektors kordinater i dette rommet. La oss si at vi ønsker å finne vektoren v sine komponenter i basisen $(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \cdots, \mathrm{u}_n)$. Vektoren skrives

$$\mathrm{v} = c_1\mathrm{u}_1 + c_2\mathrm{u}_2 + \ldots + c_n\mathrm{u}_n$$

og komponentene er $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$. Tar vi indreproduktet av begge sidene av likningen med u_k, får vi en haug med kanselleringer, og det eneste som står igjen, er

$$(\mathrm{u}_k, \mathrm{v}) = c_k(\mathrm{u}_k, \mathrm{u}_k),$$

eller

$$c_k = \frac{(\mathrm{u}_k, \mathrm{v})}{(\mathrm{u}_k, \mathrm{u}_k)}.$$

Det er så lett!

La u_1, u_2, ...,u_n være en ortogonal basis for V, og la $\mathrm{v} \in V$. Da er

$$\mathrm{v} = c_1\mathrm{u}_1 + c_2\mathrm{u}_2 + \cdots + c_n\mathrm{u}_n$$

der

$$c_k = \frac{(\mathrm{u}_k, \mathrm{v})}{(\mathrm{u}_k, \mathrm{u}_k)}.$$

Dersom basisen er ortonormal, blir teoremet enda enklere, og pytagoras gir en ekstra fun fact.

Pytagoras II

La $u_1, u_2, \ldots, u_n$ være en ortonormal basis for V, og la $v \in V$. Da er

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

der

$$c_k = (u_k, v),$$

og

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

Bevis. Dersom basisen er ortonormal, blir

$$(u_k, u_k) = 1$$

for alle k. Tar man indreproduktet av

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

med seg selv og gjør alle kanselleringer, detter

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

ut. Jeg har skrevet absoluttverditegn for at det skal være tydelig hvordan teoremet ser ut for komplekse indreprodukt, se lenger ned. □

Det er ikke uvanlig å kalle

$$c_k = \frac{(u_k, v)}{(u_k, u_k)}$$

for fourierkoeffisientene. Dette vil bli klart litt lenger ned. Det faktum at

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

kalles gjerne Parsevals teorem, ihvertfall dersom $n = \infty$.

Eksempel 5.10. Dersom du ønsker å løse et lineært likningssystem

$$Ux = b,$$

der søylene i matrisen er reelle og ortogonale vektorer $u_1, u_2, \ldots, u_n$, er det bare å gange på begge sider med U^T:

$$U^T U x = U^T b$$

For siden kolonnene til U er ortogonale, blir den kvadratiske matrisen $U^T U$ diagonal:

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & u_2^T u_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & u_3^T u_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_n^T u_n \end{bmatrix}$$

Løsningen av systemet $U^T U x = U^T b$ bare å skrive rett opp uten gausselimiasjon:

$$v = \frac{u_1^T b}{u_1^T u_1} u_1 + \frac{u_2^T b}{u_2^T u_2} u_2 + \ldots + \frac{u_n^T b}{u_n^T u_n} u_n$$

Vi sier at U er en ortogonal matrise dersom søylene i U er ortogonale. △

Dersom $v \notin V$, har uttrykket

$$\frac{(u_1, v)}{(u_1, u_1)} u_1 + \frac{(u_2, v)}{(u_2, u_2)} u_2 + \ldots + \frac{(u_n, v)}{(u_n, u_n)} u_n$$

allikevel en artig egenskap: Dette er vektoren i V som er nærmest v, målt i lengden gitt av indreproduktet.

Kortest avstand

La $u_1, u_2, \ldots, u_n$ være en ortogonal basis for V, og la $v \notin V$. Punktet

$$v' = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n$$

der

$$c_k = \frac{(u_k, v)}{(u_k, u_k)}$$

er det punktet i V som har kortest avstand til v:

$$\|v - v'\| = \min_{w \in V} \|v - w\|$$

Bevis. Vi må først bevise at $v - v'$ står ortogonalt på V. Rommet V er utspent av $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Vi sjekker at $v - v'$ står ortogonalt på hver u_k:

$$\begin{aligned}(v - v', u_k) &= (v, u_k) - (v', u_k) \\ &= (v, u_k) - (v, u_k) = 0\end{aligned}$$

Dersom $w \in V$, ligger også $w - v'$ i V, og da står $w - v'$ og $v - v'$ ortogonalt på hverande. Pytagoras' teorem gir

$$\begin{aligned}\|v - w\|^2 &= \|v - v' - (w - v')\|^2 \\ &= \|v - v'\|^2 + \|w - v'\|^2 \geq \|v - v'\|^2,\end{aligned}$$

for alle $w \in V$, slik at

$$\|v - w\| \geq \|v - v'\|,$$

og

$$\|v - v'\| = \min_{w \in V} \|v - w\|.$$ □

Komplekse indreprodukt

Dersom V er et vektorrom over $\mathbb{C}$, er det mest naturlig å kreve at indreproduktet blir et komplekst tall. Reglene blir litt annerledes, og følgende aksiomer skal gjelde.

Komplekse indreprodukt

La V være et vektorrom over $\mathbb{C}$, la u, v og w være vektorer, og a og b komplekse tall. Indreproduktet skal være konjugert symmetrisk

$$(v, w) = \overline{(w, v)},$$

og positivt definitt

$$(v, v) > 0 \quad \text{dersom} \quad v \neq 0,$$

og lineært enten første eller andre faktor.

Linearitet i den ene faktoren, impliserer antilinearitet i den andre faktoren. Dersom det komplekse indreproduktet er lineært i andre faktor,

$$(u, av + bw) = a(u, v) + b(u, w)$$

blir det antilineært i første faktor:

$$(au + bv, w) = \overline{a}(u, w) + \overline{b}(v, w)$$

Dersom det er lineært i første faktor,

$$(au + bv, w) = a(u, w) + b(v, w)$$

blir det antilineært i andre faktor:

$$(u, av + bw) = \overline{a}(u, v) + \overline{b}(u, w)$$

Forskjellige fagfelt foretrekker forskjellig versjon, så det er greit å vite om at dette kan gjøres på to måter. Vi skal ha mest bruk for den varianten som er lineær i første faktor, for det er denne som er vanlig i fourieranalyse. Relle indreprodukt er lineære i begge faktorer, så da faller problemstillingen bort.

Eksempel 5.11. La V være et vektorrom av integrerbare funksjoner $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$. Uttrykket

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

definerer et komplekst indreprodukt på V, og funksjonene e^{int} er ortogonale med hensyn på dette indreproduktet. Dette indreproduktet er lineært i første faktor. △

Eksempel 5.12. La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

være en kompleks $m \times n$-matrise. Hvis vi transponerer A og komplekskonjugerer komponentene, får vi den adjungerte matrisen

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{m1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{bmatrix}.$$

La v og w være søylevektorer i $\mathbb{C}^n$. Indreproduktet mellom dem er som regel definert som:

$$(v, w) = v^* w = \overline{v}_1 w_1 + \overline{v}_2 w_2 + \cdots + \overline{v}_n w_n$$

Merk at (v, v) består av de kvadrerte absoluttverdiene til komponentene til v, slik at at vi får et fornuftig mål på lengden til v. (Dersom $n = 1$, klapper dette sammen til å bli modulus til et komplekst tall.)
Dette indreproduktet er lineært i andre faktor, som antagelig springer ut fra tradisjonen med å fokusere på søylevektorer. Skulle vi hatt et indreprodukt som var lineært i første faktor, hadde det vært mer naturlig å si at v og w var radvektorer i $\mathbb{C}^n$, og definere

$$(v, w) = vw^* = v_1 \overline{w}_1 + v_2 \overline{w}_2 + \cdots + v_n \overline{w}_n,$$

men dette er altså ikke denne varianten som er vanligst i bruk. △

Akkurat som for reelle indreprodukt, har vi at $(w, v) = 0$ dersom $(v, w) = 0$. De fleste teoremene vi beviste for reelle indreproduktrom, gjelder for komplekse indreproduktrom, men unntaket er Pytagoras' teorem, som blir litt annerledes.

Pytagoras III

Dersom vektorene v og w er ortogonale, er

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Bevis. Vi vet at

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= (v - w, v - w) \\ &= (v, v) - (v, w) - (w, v) + (w, w) \\ &= \|v\|^2 - (v, w) - (w, v) + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 \end{aligned}$$

siden $(v, w) = (w, v) = 0$. □

Eksempel 5.13. I den komplekse varianten av Pytagoras' teorem er det kun enveis implikasjon. Det er nemlig ikke nødvendigvis sant at $(v, w) = 0$ dersom

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

for uttrykket

$$-(v, w) - (w, v)$$

kan kansellere på andre måter enn at begge indreprodukt er null. Se øvingsopplegg. △

Eksempel 5.14. Vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

er ortogonale. △

Den ortogonale projeksjonen må defineres som

$$P_v(w) = \frac{(w, v)}{(v, v)} v,$$

eller

$$P_v(w) = \frac{(v, w)}{(v, v)} v,$$

alt etter om man opererer med et indreprodukt som er lineært i første eller andre faktor. En lineæravbildning skal jo være lineær, ikke antilineær!

Eksempel 5.15. La oss projisere vektoren

$$w = \begin{bmatrix} -5i \\ 0 \\ 2i \end{bmatrix}$$

både på og normalt på

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ -i \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner:

$$(v, v) = 3 \cdot 3 + i \cdot (-i) + 4 \cdot 4 = 26$$

og

$$(v, w) = 3 \cdot (-5i) + i \cdot 0 + 4 \cdot 2i = -7i$$

slik at

$$P_{\mathrm{v}}(\mathrm{w}) = \frac{(\mathrm{v},\mathrm{w})}{(\mathrm{v},\mathrm{v})}\mathrm{v} = \frac{-7i}{26}\begin{bmatrix}3\\-i\\4\end{bmatrix}$$

og

$$\begin{aligned}\mathrm{w} - P_{\mathrm{v}}(\mathrm{w}) &= \mathrm{w} - \frac{(\mathrm{v},\mathrm{w})}{(\mathrm{v},\mathrm{v})}\mathrm{v}\\ &= \begin{bmatrix}-5i\\0\\2i\end{bmatrix} - \frac{-7i}{26}\begin{bmatrix}3\\-i\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix}-109i\\7\\80i\end{bmatrix}\end{aligned}$$

△

Eksempel 5.16. Partialsummen til en fourierrekke

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

der

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$

er en ortogonal projeksjon av f ned i vektorrommet utspent av funksjonene e^{int} for $-N \leq n \leq N$. Dersom $N \to \infty$, utgjør disse funksjonene en basis for et uendeligdimensjonalt vektorrom som heter $L^2(-\pi,\pi)$, og for alle f i dette rommet er det riktig å skrive at

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

Dette kan ikke vi vise, for det er ganske komplisert, og man må først gjennom et komplisert kurs i noe som heter funksjonalanalyse. Men det er greit å vite at fourierrekker egentlig bare er lineæralgebra. Matematikkens styrke er at mange ting som ser helt forskjellige ut, oppfører seg temmelig likt. Man må bare studere oppførselen nøye, litt som en etolog som studerer sjimpanser, gorillaer, orangutanger eller fjellbavianer. △

Minste kvadraters metode

Dette er en teknikk for å finne tilnærmede løsninger til lineære systemer med flere likninger enn ukjente. Teoremet om kortest avstand forteller hvordan vi kan gjøre dette på en fornuftig måte om vi har en ortogonal basis for søylerommet til matrisen. Minste kvadraters metode er en teknikk som finner den samme løsningen, men som ikke avhenger av at vi har en ortogonal basis for søylerommet.
La oss si at A er en $m \times n$-matrise, at x og b er kolonnevektorer i $\mathbb{C}^n$, og at vi ønsker å betrakte systemet

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

for $m > n$. Dette systemet vil ikke ha noen løsning med mindre b tilfeldigvis ligger i kolonnerommet til A, så vi ønsker istedet å finne den x som minimerer avstanden fra Ax til b. Hvis vi krever at vektoren Ax − b står ortogonalt på kolonnerommet til A, oppnår vi dette. Altså må vi ha

$$A^*(A\mathrm{x} - \mathrm{b}) = 0$$

eller

$$A^*A\mathrm{x} = A^*\mathrm{b}.$$

Dette er et $n \times n$-system som kalles normallikningene. Løsningen av systemet gir den x som minimerer avstanden fra Ax til b.

Eksempel 5.17. Vi ønsker å bruke minste kvadrats metode på systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 1-i\\ i & i & 1+i\\ 0 & i & i\end{array}\right]$$

Vi ganger matrisen på venstre side av likningssystemet med sin adjungerte

$$\begin{bmatrix}0 & -i & 0\\ 1 & -i & -i\end{bmatrix}$$

og får

$$\begin{bmatrix}0 & -i & 0\\ 1 & -i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ i & i\\ 0 & i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Vi ganger høyresiden med den adjungerte av venstresiden, og får

$$\begin{bmatrix}0 & -i & 0\\ 1 & -i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-i\\ 1+i\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-i\\ 3-2i\end{bmatrix}$$

Løsningen av systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1-i\\ 1 & 3 & 3-2i\end{array}\right]$$

er

$$\begin{bmatrix}-i/2\\ 1-i/2\end{bmatrix}.$$

Dette betyr at vektoren

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ i & i\\ 0 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i/2\\ 1-i/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-i/2\\ 1+i\\ 1/2+i\end{bmatrix}$$

er det punktet i kolonnerommet til matrisen

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ i & i\\ 0 & i\end{bmatrix}$$

som minimerer avstanden til punktet

$$\begin{bmatrix}1-i\\ 1+i\\ i\end{bmatrix}$$

△

Polynominterpolasjon

Hvis du har $n+1$ punkter (x_i, y_i) i $\mathbb{R}^2$, der x_i er forskjellig for alle punktene, vil det alltid være mulig å finne et reelt polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

hvis graf går gjennom alle disse punktene, altså at

$$p(x_i) = y_i$$

for alle $1 \leq i \leq n+1$. Dette kalles interpolasjon. Likningene over utgjør et $(n+1) \times (n+1)$-likningssystem for koeffisientene a_i med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 & y_{n+1} \end{array}\right]$$

Det kan vises at dette likningssystemet alltid har entydig løsning så lenge $x_j \neq x_k$ for $j \neq k$, og av dette følger at du alltid kan interpolere $n+1$ punkter med et polynom av orden n på en entydig måte.

Eksempel 5.18. Vi prøver å finne et annengradspolyom som går gjennom punktene

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

Et annengradspolynom skrives $p(x) = ax^2 + bx + c$, så likningssystemet blir

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ a + b + c &= 0 \\ 4a + 2b + c &= 1 \end{aligned}$$

Løsningen er $a = 1$, $b = -2$ og $c = 1$, slik at polynomet blir $p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Det er lett å sjekke at polynomet tar de rette verdiene i $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$. △

Dersom man prøver å gjøre den samme prosessen med et polynom som har orden $m < n$, vil man få det overbestemte $(n+1) \times (m+1)$systemet

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1^m & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^m & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^m & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 & y_{n+1} \end{array}\right]$$

Bruker man så minste kvadrats metode på dette systemet, får man et polynom som passer ganske bra til punktene uten at grafen går gjennom hvert enkelt punkt - dette kalles regresjon.

Eksempel 5.19. Vi prøver å finne et annengradspolyom som går gjennom punktene

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}.$$

Likningssystemet blir nå

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ a + b + c &= 0 \\ 4a + 2b + c &= 1 \\ 9a + 3b + c &= 2 \end{aligned}$$

Dette systemet har ingen løsning, men vi kan bruke minste kvadrats metode til å finne et polynom som passer ganske bra. Matrisen er:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

mens høyresiden b er:

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Den adjungerte A^* er:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ganger A^* med A og b, og får

$$A^*A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

og

$$A^*\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\8\\4\end{bmatrix}$$

Vi må løse systemet $A^*A = A^*\mathrm{b}$, altså systemet med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 98 & 36 & 14 & 22 \\ 36 & 14 & 6 & 8 \\ 14 & 6 & 4 & 4 \end{array}\right].$$

Løsningen er

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ -11/10 \\ 9/10 \end{bmatrix}$$

slik at polynomet blir

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{9}{10}.$$ △

Eksempel 5.20. Når statistikere snakker om regresjonslinje, snakker de om et første ordens polynom som prøver å reise gjennom en punktmengde med litt for mange punkter, der minste kvadraters metode er brukt for å finne noen koeffisienter som får linjen til å passe ganske bra til punktene. La oss gjøre dette for punktmengden i eksemplet over:

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}.$$

Regresjonslinjen er gitt ved $p(x) = ax + b$, så likningssystemet blir

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ a + b &= 0 \\ 2a + b &= 1 \\ 3a + b &= 2 \end{aligned}$$

Dette systemet har ingen løsning. Vi bruker minste kvadrats metode, og beregner

$$A^*A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

og

$$A^*\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Løsningen til $A^*A = A^*\mathrm{b}$ blir

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

slik at regresjonslinjen blir

$$p(x) = \frac{2}{5}\,(x+1)\,. \qquad \triangle$$

Oppgaver

1. Vis at vektoren $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{w}}{\|\mathrm{w}\|}$ har lengde 1 for alle $\mathrm{w} \neq 0$.

2. La V være et vektorrom over $\mathbb{C}$, og finn to ikke-ortogonale vektorer slik at

$$\|\mathrm{v} - \mathrm{w}\|^2 = \|\mathrm{v}\|^2 + \|\mathrm{w}\|^2.$$

3. Finn koordinatene til

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i basisen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. En generalisering av Pytagoras gjelder for ikkerettvinklede trekanter, og kalles cosinussetningen. Den sier at dersom vinkelen mellom beina med lengde a og b er θ istedet for $\pi/2$, er

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2.$$

Utled denne.

5. Sjekk at skalarproduktet $\mathrm{v} \cdot \mathrm{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$ er et indreprodukt.

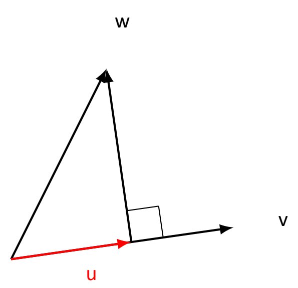
6. Bruk cosinussetningen til å vise at

$$\|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|\cos\theta = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

7. Vis at

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v} \cdot \mathrm{w}}{\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}}\mathrm{v}$$

i figuren under.



8. Vis at

$$P_{\mathrm{v}}(\mathrm{w}) = \frac{(\mathrm{w}, \mathrm{v})}{(\mathrm{v}, \mathrm{v})}\mathrm{v}$$

er en lineæravbildning.

9. Løs likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

10. Finn den ortogonale projeksjonen av

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

på rommet utspent av

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

11. Finn den ortogonale projeksjonen av

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

på rommet utspent av

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12. Finn den ortogonale projeksjonen av vektoren

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

på kolonnerommet til

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

13. Sjekk at

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

definerer et komplekst indreprodukt.

14. Teorem 5.13, 5.15 og 5.18 har ekvivalente eller veldig like teoremer i kapittel 2. Finn ut hvilke, og gjør rede for hvorfor de er like eller ekvivalente.

15. Finn koordinatene til vektoren

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i basisen gitt av søylene til

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Finn en ortogonal basis for søylerommet til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

17. Finn koordinatene til vektoren

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i den ortogonale basisen for søylerommet til

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. I beviset for teorem 5.11 finner du Gram-Schmidts metode. Bruk Gram-Schmidts metode til å finne en ortogonal basis for vektorrommet av alle reelle polynomer på $[-1, 1]$ av maksimal grad 2. Indreproduktet er

$$\int_{-1}^{1} p(t)q(t)\ dt$$

der p og q er to slike polynomer. Sjekk etterpå at basisen du fant faktisk er ortogonal, og finn koordinatene til $p(t) = t^2$ i denne basisen.

19. Finn regresjonslinjen til punktene $(-1, 5)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$ og $(2, -1)$.