Kapittel 6

Egenrom

I Øysteins kapittel ble reelle egenverdier og egenvektorer behandlet. I dette kapitlet skal vi utvide dette konseptet til komplekse matriser og generelle lineæravbildninger.

Egenverdier

La $T : V \to V$ være en lineæravbildning. En egenvektor med egenverdi λ er en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ slik at

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Som du så i Øysteins notat, er det vanlig å starte showet med å kreve at en egenvektor ikke kan være nullvektoren, slik at ikke alle skalarer skal passere nåløyet som egenverdier, og så reintrodusere nullvektoren som egenvektoren til en gitt egenverdi, slik at egenvektorene til denne egenverdien danner et rom. Dette er selvfølgelig et vektorrom, og kalles egenrommet til λ.

Fra kapitlet om komplekse tall husker vi at et n-te ordens polynom alltid kan faktoriseres i n lineære faktorer. På folkemunne er det vanlig å si at en polynomlikning

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

har ’n løsninger’, Dette er litt upresist, men i og for seg riktig dersom vi teller repeterte faktorer riktig.

> Teorem 6.1. Det karakteristiske polynomet til en $n \times n$-matrise har alltid orden n. En matrise har alltid n egenverdier dersom du teller med multiplisiteten til hver egenverdi.

Eksempel 6.2. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

har visst egenverdier allikevel. Det karakteristiske polynomet er

$$\lambda^2 + 1,$$

så egenverdiene er $\pm i$. △

Eksempel 6.3. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

har karakteristisk polynom

$$(3-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = (3-\lambda)(2-2\lambda+\lambda^2).$$

Den ene egenverdien er åpenbart $\lambda = 3$, mens andregradspolynomet $2 - 2\lambda + \lambda^2$ har røtter

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Her er det altså en reell egenverdi 3, og to komplekse egenverdier $1+i$ og $1-i$. △

> Teorem 6.4. Egenverdiene til en reell matrise kommer i komplekskonjugerte par.

Eksempel 6.5. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

har karakteristisk likning

$$(2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0,$$

med en enkel egenverdi $\lambda = 2$, og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. △

Det karakteristiske polynomet til en $n \times n$-matrise kan alltid spaltes i n lineære faktorer, men det finnes ikke alltid n lineært uavhengige egenvektorer.

Eksempel 6.6. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

har egenverdier

$$\lambda = \pm i.$$

Egenrommet til $-i$ er nullrommet til

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Vi vet at denne matrisen ikke er inverterbar, og da må radene være skalarmultipler av hverandre (i dette tilfellet er den nederste i ganger den øverste), så vi kan egentlig bare stryke den nederste, og se at

$$ix_1 - x_2 = 0,$$

slik at en egenvektor til $-i$ blir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Likeledes blir en egenvektor til i

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi dobbeltsjekker

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Eksempel 6.7. Vi beregner egenrommet til matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sin egenverdi $\lambda = 1 - i$. Dette er nullrommet til

$$\begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Den øverste raden forteller at $x_1 = 0$. De to nedereste ligner mistenkelig på forrige eksempel, så en egenvektor blir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Vi dobbeltsjekker

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Eksempel 6.8. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

har dobbel egenverdi $\lambda = 1$. Det tilhørende egenrommet er nullrommet til

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir at $x_2 = x_3 = 0$, så en egenvektor til $\lambda = 1$ er

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Her er egenrommet endimensjonalt, mens egenverdien hadde multiplisitet 2. $\triangle$

Egenrommet har dimensjon mindre enn eller lik multiplisiteten til egenverdien. Dersom et egenrom har lavere dimensjon enn multiplisiteten til egenverdien, sier vi at egenverdien er defekt. Dersom en $n \times n$-matrise har n lineært uavhengige egenvektorer, sier vi at den er diagonaliserbar.

Diagonalisering

La A være en $n \times n$-matrise med m lineært uavhengige egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_m$ og tilhørende egenverdier λ_1, λ_2,$\cdots$, λ_m, . For hver egenvektor gjelder

$$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Disse m ligningene kan like gjerne organiseres i en matriseligning

$$AV = VD,$$

der

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

og

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{pmatrix}.$$

Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_m$ er lineært uavhengige, er matrisen V invertibel dersom $m = n$. Vi ganger med V^{-1} fra venstre og får

$$V^{-1}AV = D.$$

Denne operasjonen kalles å diagonalisere A, og dette er grunnen til at en $n \times n$-matrise med n lineært uavhengige egenvektorer kalles diagonaliserbar. Man kan også se det motsatt. Dersom

$$V^{-1}AV = D$$

for en inverterbar $n \times n$-matrise V, kan vi gange fra venstre med V, og få

$$AV = VD$$

Vi ser av denne likningen at kolonnene til V utgjør n lineært uavhengige egenvektorer for A.

> Teorem 6.9. Vi kan skrive
>
> $$V^{-1}AV = D$$
>
> hvis og bare hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer.

Eksempel 6.10. Vi diagonaliserer matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorene er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

med respektive egenverdier 3 og 1. Vi definerer

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

og beregner

$$V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi dobbeltsjekker ved å beregne produktet

$$V^{-1}AV = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D \qquad \triangle$$

Eksempel 6.11. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

har bare to lineært uavhengige egenvektorer, og er følgelig ikke diagonaliserbar. $\triangle$

Man kan også snu likningen

$$D = V^{-1}AV$$

om, og få

$$A = VDV^{-1},$$

og dermed tenke på diagonalisering som en faktorisering av A.

Eksempel 6.12. Vi kan faktorisere matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Merk. I eksemplet over spiller ikke plasseringen av V og V^{-1} noen rolle. Mer om dette under.

La $\mathbf{v}$ være en kolonnevektor i $\mathbb{C}^n$ og A en $n \times n$-matrise. En kvadratisk form er et uttrykk på formen

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v}$$

Et slikt uttrykk er spesielt interessant dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor med lengde 1 og egenverdi λ:

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v} = \mathbf{v}^* \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^* \mathbf{v} = \lambda.$$

Eksempel 6.13. Vi lar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3. \qquad \triangle$$

Definisjon. En kompleks matrise sies å være konjugert symmetrisk dersom $A = A^*$.

Merk. Dersom A er reell er $A^* = A^T$, og dersom $A = A^T$, sier vi at A er symmetrisk.

Eksempel 6.14. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 1-i & 0 & 2-i \\ i & 2+i & 2 \end{pmatrix}$$

er konjugert symmetrisk. $\triangle$

Merk. En konjugert symmetrisk matrise må har reelle diagonalelementer, siden $z = \overline{z}$ for alle elementer der.

Definisjon. En $n \times n$-matrise er ortogonalt diagonaliserbar dersom den har n ortogonale egenvektorer.

Merk. Denne definisjonen kommer kanskje som troll i eske. Men alt blir klart om litt.

Dersom vi lar V være en $n \times n$-matrise bestånde av A sine n ortonormale egenvektorer, ser vi at

$$V^* AV = V^* VD = D$$

siden $V^* V = I$. Motsatt ser vi at dersom

$$V^* AV = D,$$

for en ortonormal matrise V, utgjør V sine kolonner n ortonormale egenvektorer for D.

Teorem 6.15. Vi kan skrive

$$V^* AV = D$$

hvis og bare hvis A har n ortogonale egenvektorer.

Teorem 6.16. Dersom $A = A^*$, er $\mathbf{x}^* A \mathbf{x}$ reell.

Bevis. Vi tar beviset kun for 2×2-matriser. Selv Gilbert Strang gjør det for sine studenter, og han er professor på Harvard. En konjugert symmetrisk 2×2-matrise kan skrives

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & z \\ \overline{z} & r_2 \end{pmatrix}$$

der r_1 og r_2 er relle tall. Vi beregner

$$\mathbf{x}^* A \mathbf{x} = r_1 x_1 \overline{x_1} + z \overline{x_1} x_2 + \overline{z} x_1 \overline{x_2} + r_2 x_2 \overline{x_2}.$$

Nå er $r_1 x_1 \overline{x_1}$ og $r_2 x_2 \overline{x_2}$ reelle tall, mens $z \overline{x_1} x_2$ og $\overline{z} x_1 \overline{x_2}$ er hverandres komplekskonjugater, og følgelig er $z \overline{x_1} x_2 + \overline{z} x_1 \overline{x_2}$ også et reelt tall. $\square$

Teorem 6.17. En konjugert symmetrisk matrise har reelle egenverdier.

Bevis. La $\mathbf{v}$ være en normalisert egenvektor med egenverdi λ. Vi vet at

$$\mathbf{v}^* A \mathbf{v} = \lambda,$$

og venstresiden er reell, så da må også λ være det. $\square$

Teorem 6.18. Egenvektorene til to distinkte egenverdier er ortogonale for konjugert symmetriske matriser.

Bevis. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være to egenvektorer med egenverdier λ_1 og λ_2. Vi beregner (husk at λ_1 og λ_2 er reelle)

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 &= (\lambda_1 \mathbf{v}_1)^* \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^* \mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{v}_1^* A^* \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^* (A\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^* (\lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Vi vet altså at

$$0 = \lambda_1 \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2,$$

og hvis vi bruker at λ_1 og λ_2 er forskjellige, må vi ha $\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2 = 0$. $\square$

Det siste teoremet vi tar med, må vi dessverre la stå ubevist. Det er litt for hardt.

Teorem 6.19. En konjugert symmetrisk matrise er ortogonalt diagonaliserbar.

Eksempel 6.20. Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

har egenverdier 4, 9 og 0. Egenvektorerer er henholdsvis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Merk at alle vektorer er innbyrdes ortogonale, og matrisen er følgelig ortogonalt diagonaliserbar, med

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}}. \end{pmatrix}$$

og

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Merk. Det forrige eksemplet viser at en matrise kan være diagonaliserbar uten å være inverterbar.

En matrise er normal dersom $A^*A = AA^*$.

Teorem 6.21. En matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er normal.

Oppgaver

Uten LF

1. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

og finn P og D slik at $AP = PD$.

2. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og finn P og D slik at $AP = PD$.

3. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og finn P og D slik at $AP = PD$.

4. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

og finn P og D slik at $AP = PD$.

5. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

og finn P og D slik at $AP = PD$.

6. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og finn P og D slik at $AP = PD$.

7. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Finn alle egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og finn P og D slik at $A = PDP^T$.

9. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Finn P og D slik at $A = PDP^T$.

b) La $\mathbf{v}_0$ være en tilfeldig vektor. Bruk Python til å studere rekursjonen

$$\mathbf{v}_n = \frac{A\mathbf{v}_{n-1}}{\|A\mathbf{v}_{n-1}\|}$$

når $n \to \infty$, og forklar hva som skjer.

10. La $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæroperatoren som roterer vektorer med vinkelen θ.

a) Vis a standardmatrisen for T_θ er

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

b) Diagonaliser T_θ.

c) Regn ut

$$T_{2\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad T_\theta\left(T_\theta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

11. La A være en inverterbar matrise. Vis at A^{-1} har de samme egenvektorene som A. Hvordan ser egenverdiene ut?

12. La A være en reell matrise. Vis at komplekse egenverdier og egenvektorer kommer i komplekskonjugerte par.

13. Finn egenverdier og egenvektorer til lineæroperatorene

a) $F(y) = \dot{y}$

b) $F(y) = \ddot{y}$

14. Snikdiskretifisering av fourierrekker: La f være 2π-periodiske firkantbølgen

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1/2 \\ 0 & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Vi setter opp et gitter med punkter

$$t_k = \frac{2\pi k}{N},$$

der $0 \leq k < N$. Plott det trigonometriske polynomet

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{2\pi i n t}$$

med koeffisienter

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-2\pi i n k}.$$

for $N = 8$.

Hint: La $\omega = e^{\frac{-\pi i}{4}}$. Da er

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega^{10} & \omega^{12} & \omega^{14} \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} & \omega^{15} & \omega^{18} & \omega^{21} \\ \omega^0 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} & \omega^{20} & \omega^{24} & \omega^{28} \\ \omega^0 & \omega^5 & \omega^{10} & \omega^{15} & \omega^{20} & \omega^{25} & \omega^{30} & \omega^{35} \\ \omega^0 & \omega^6 & \omega^{12} & \omega^{18} & \omega^{24} & \omega^{30} & \omega^{36} & \omega^{42} \\ \omega^0 & \omega^7 & \omega^{14} & \omega^{21} & \omega^{28} & \omega^{35} & \omega^{42} & \omega^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ f(t_2) \\ f(t_3) \\ f(t_4) \\ f(t_5) \\ f(t_6) \\ f(t_7) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -i & -i\omega & -1 & -\omega & i & i\omega \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -i\omega & i & \omega & -1 & i\omega & -i & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & -i & i\omega & -1 & \omega & i & -i\omega \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & i\omega & i & -\omega & -1 & -i\omega & -i & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ f(t_2) \\ f(t_3) \\ f(t_4) \\ f(t_5) \\ f(t_6) \\ f(t_7) \end{pmatrix}$$

Du kan også prøve andre funksjoner enn firkantbølgen.

Med LF

15. En projeksjonsmatrise P er definert ved likningen

$$P = P^2$$

Denne likningen sier at det ikke skjer noe nytt om man benytter projeksjonen for andre gang. Vis at P kun kan ha egenverdier 0 og 1.

Løsningsforslag

11. La oss si at P har en egenverdi λ, med egenvektor $\mathbf{x}$. I så fall må

$$\lambda\mathbf{x} = P\mathbf{x} = P^2\mathbf{x} = P(P\mathbf{x}) = P(\lambda\mathbf{x}) = \lambda P\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}.$$

Dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, må

$$\lambda = \lambda^2$$

eller

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Egenverdiene til en projeksjonsmatrise kan altså kun være 0 eller 1.