Kapittel 7

Vektorfunksjoner av én uavhengig variabel

En vektorfunksjon er en vektor der komponentene er funksjoner. Vi skal begynne med å studere vektorfunksjoner der definisjonsmengden $\mathbb{R}$ eller en bit av denne, og verdimengden er $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}$. Grafen til en vektorfunksjon kan man tenke på som trajektorien til en flue som surrer rundt i rommet en varm sommerdag. Mengden av alle vektorfunksjoner utgjør et vektorrom med uendelig mange dimensjoner.

Eksemplene over illustrerer at mange forskjellige vektorfunksjoner kan representere det samme grafiske objektet, i den forstand at to forskjellige vektorfunksjoner kan ha nøyaktig den samme grafen, selv om funksjonsuttrykkene er forskjellige. Funksjonsuttrykket $\mathsf{x}(t)$ kalles gjerne en parametrisering for kurven det er snakk om.

Parametriseringer

Du kjenner allerede mange vektorfunksjoner.

Eksempel 7.1. Funksjonen $\mathsf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathsf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

beskriver en rett linje. Disse var i min tid pensum på videregående skole. △

Eksempel 7.2. Funksjonen $\mathsf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathsf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

beskriver den samme rette linjen som i forrige eksempel, men fluen flyr her med dobbel fart. △

Eksempel 7.3. Funksjonen $\mathsf{y} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathsf{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

beskriver enhetssirkelen. Jeg vet ikke om denne vektorfunksjonen er pensum på videregående skole, men det er definitivt pensum å vite at $(\cos t, \sin t)$ er et punkt på enhetssirkelen for alle t. △

Eksempel 7.4. Funksjonen $z : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

beskriver også enhetssirkelen, men nå i det komplekse planet. △

Eksempel 7.5. Dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en vanlig envariabel funksjon, vil

$$\mathsf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

tegne den samme grafen i $\mathbb{R}^2$. △

Tangentvektoren

For envariable funksjoner definerer man stigningstall, og så bruker man dette til å skrive opp en likning for tangenten. For vektorfunksjoner definerer vi bare tangent på direkten.

Fartsvektoren

Tangenten til vektorfunksjonen $\mathsf{x}(t)$ er

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathsf{x}(t+h) - \mathsf{x}(t)}{h}.$$

Dersom tangenten eksisterer, sier vi at x er deriverbar. Definisjonen impliserer at dersom

$$\mathsf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

er

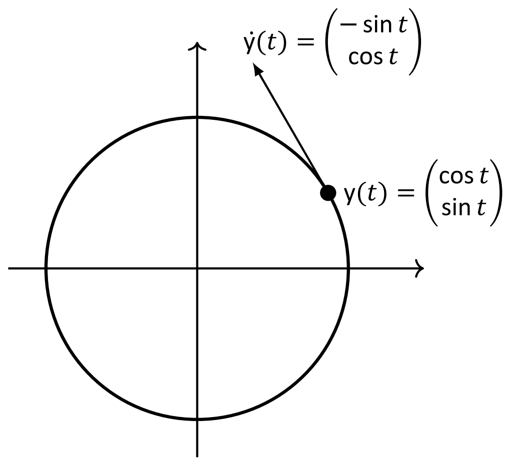
$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Eksempel 7.6. Enhetssirkelfunksjonen

$$\mathsf{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

har tangentvektor gitt ved

$$\mathsf{y}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$



Her er det viktig å holde styr på den geometriske betydningen av $y(t)$ og $\dot{y}(t)$. Den første kan du tenke på som et punkt i planet. Den andre kan du tenke på som kursen til partikkelen. $\triangle$

Her er en haug med derivasjonsregler.

Noen regneregler

Dersom x, y og λ er deriverbare, er

$$\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = \dot{x}(t) + \dot{y}(t)$$
$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)x(t)) = \dot{\lambda}(t)x(t) + \lambda(t)\dot{x}(t)$$
$$\frac{d}{dt}(x(t) \cdot y(t)) = \dot{x}(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot \dot{y}(t)$$
$$\frac{d}{dt}(x(t) \times y(t)) = \dot{x}(t) \times y(t) + x(t) \times \dot{y}(t)$$
$$\frac{d}{dt}x(\lambda(t)) = \dot{\lambda}(t)\dot{x}(t)$$

Hvis man tenker at fluen har speedometer, er $\|\dot{x}(t)\|$ farten som vises på speedometeret ved tiden t.

Speedometerets hemmelighet

Banefarten til vektorfunksjonen $x(t)$ er

$$v(t) = \|\dot{x}(t)\|$$

Eksempel 7.7. Enhetssirkelfunksjonen

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

konstant fart:

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \end{aligned}$$

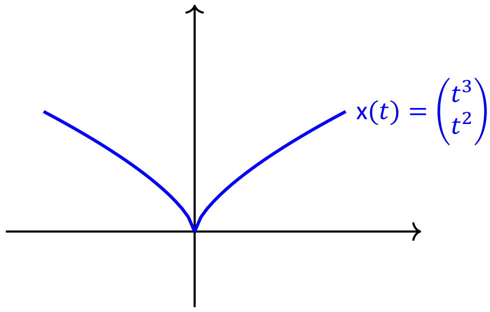
$\triangle$

En av de store forskjellene mellom vektorfunksjoner og vanlige funksjoner, er dette med glattheten.

Eksempel 7.8. Funksjonen

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

ser slik ut:



Komponentfunksjonene t^3 og t^2 er deriverbare funksjoner, men grafen til x er allikevel ikke en glatt kurve. $\triangle$

Det vi trenger for å luke ut slik patologisk oppførsel, er enhetstangentvektoren.

Enhetstangentvektoren

Enhetstangentvektoren til vektorfunksjonen $x(t)$ er

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = \frac{\|\dot{x}(t)\|}{v(t)}.$$

Eksempel 7.9. La oss beregne enhetstangentvektoren til

$$y(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Den er

$$T(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\|\dot{y}(t)\|} = \begin{pmatrix} \frac{3t^2}{\sqrt{9t^4+4t^2}} \\ \frac{2t}{\sqrt{9t^4+4t^2}} \end{pmatrix}.$$

Hva skjer i $t = 0$? La oss regne ut noen grenseverdier. Førstekomponenten er grei nok, siden

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3t^2}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3t^2}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} = 0.$$

Men i andrekomponenten får vi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2t}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{t}{|t|} \frac{2}{\sqrt{9t^2 + 4}} = 1$$

og

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2t}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{t}{|t|} \frac{2}{\sqrt{9t^2 + 4}} = -1.$$

Dette betyr at

$$\lim_{x\to 0^+} T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mens

$$\lim_{x\to 0^-} T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

slik at $\lim_{x\to 0} T(t)$ ikke eksisterer. $\triangle$

Enhetstangentvektoren har alltid lengde en. Dette betyr at endringen til enhetsvektoren kun sier noe om hvordan kurven dreier, og dersom $\lim_{t\to a} T(t)$ ikke eksisterer, vil kurven ha en knekk eller noe slikt i $t = a$.

Glatt som et olja lyn

Vi sier at kurven til $x(t)$ er glatt dersom $\dot{x}$ er kontinuerlig og $v(t) \neq 0$.

Normalvektoren

La oss kikke litt på enhetstangentvektoren. Merk at

$$\mathsf{T}(t) \cdot \mathsf{T}(t) = 1,$$

siden T er en enhetsvektor. Hvis vi deriverer hver side av likningen, får vi

$$2\dot{\mathsf{T}}(t) \cdot \mathsf{T}(t) = 0$$

som sier at den deriverte av enhetstangentvektoren står normalt på enhetstangentvektoren.

Enhetsnormalvektoren

> Dersom $\mathsf{T}(t) \neq 0$, er enhetsnormalvektoren til kurven gitt ved
>
> $$\mathsf{N}(t) = \frac{\dot{\mathsf{T}}(t)}{\|\dot{\mathsf{T}}(t)\|}.$$

Eksempel 7.10. En rett linje har ikke noen definert enhetsnormalvektor. △

La oss anta $\mathsf{T}(t) \neq 0$. Vi kan nå utlede at

$$\dot{\mathsf{y}}(t) = v(t)\mathsf{T}(t),$$

og at

$$\begin{aligned} \ddot{\mathsf{y}}(t) &= \dot{v}(t)\mathsf{T}(t) + v(t)\dot{\mathsf{T}}(t) \\ &= \dot{v}(t)\mathsf{T}(t) + v(t)\|\dot{\mathsf{T}}(t)\|\mathsf{N}(t). \end{aligned}$$

Av dette ser vi at akselerasjonen til en partikkel som dreier har to komponenter, Den ene komponenten tangentiell til banen med størrelse $\dot{v}(t)$, og den andre står normalt på banen med størrelse $v(t)\|\dot{\mathsf{T}}(t)\|$. Den siste kalles sentripetalakselerasjonen.

En sving på en bilvei trenger ikke være en sirkulær bane, men ingeniører i Vegvesenet snakker allikevel om svingens krumningsradius. Dette er fornuftig mål på hvor krapp svingen er. Vi tenker at det ligger en sirkel som tangerer kurven i $\mathsf{x}(t)$, med sentrum i et sted på linjen spent ut av normalvektoren $\mathsf{N}(t)$ og radius $R(t)$. Dersom en partikkel reiser gjennom $\mathsf{x}(t)$, kan vi stille oss spørsmålet hvilken radius som ville gitt den samme sentripetalakselerasjonen dersom partikkelen hadde gått i en sirkulær bane med samme banefart $v(t)$. For en sirkulær bane er sentripetalakselerasjonen er gitt ved v^2/R, og setter vi denne lik den faktiske sentripetalakselerasjonen til partikkelen,

$$v(t)\|\dot{\mathsf{T}}(t)\| = \frac{v^2(t)}{R(t)}$$

kan vi regne ut

$$R(t) = \frac{v(t)}{\|\dot{\mathsf{T}}(t)\|}.$$

Sirkelen kalles oskulasjonssirkelen, og $R(t)$ kalles kurvens krumningsradius. Akkurat som at stigningstall er stigningstallet til en rett linje vi assosierer med hvert punkt på kurven, er krumningsradien radien i en sirkel assosiert med hvert punkt på kurven. Krumningsradien kan også skrives

$$R(t) = \frac{v^3(t)}{|x_1(t)x_2(t) - x_1(t)x_2(t)|},$$

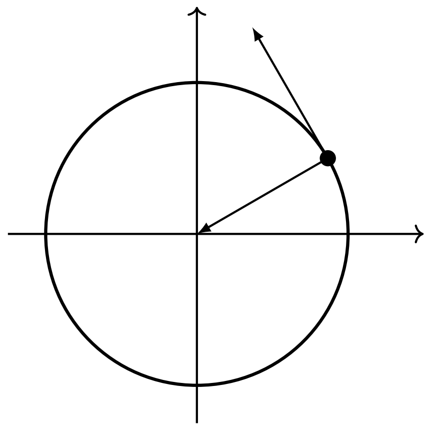
men å vise dette er ganske hårete, se øvingsopplegg neste semester.

Eksempel 7.11. Enhetssirkelfunksjonen

$$\mathsf{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

har enhetsnormalvektor gitt ved

$$\mathsf{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$



Merk at dersom kurven faktisk er en sirkel, vil enhetsnormalen peke inn mot sirkelens sentrum. △

Oppgaver

1. Et plan er gitt ved likningen

$$x + 2y + 3z = 6.$$

Finn en parametrisering for skjæringslinjen mellom dette planet og planet gitt ved

a) $x = 0$

b) $y = 0$

c) $z = 0$

d) $x + y + z = 1$

2. En ellipse er en kurve som tilfredsstiller likningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Finn en parametrisering for denne, og regn ut enhetstangentvektoren.

3. VIs at en ellipse med halvakser rotert $\pi/4$ radianer i forhold til koordinataksen tilfredsstiller likningen

$$\frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} = 1,$$

og vis at kurven parametrisert ved

$$\mathrm{x}(t) = (\cos t, \cos(t + \phi))$$

er en slik ellipse. (Hint: rotasjonsmatrisen.)

4. En ellipsoide er gitt ved likningen

$$2x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2.$$

Finn en parametrisering for skjæringskurven mellom ellipsoiden og xy-planet.

5. Den helt klart viktigste vektorfunksjonen for oss resten av dette semesteret, er

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{v}e^{\lambda t},$$

der v er en konstant vektor, og $\lambda \neq 0$ er en skalar.

a) Finn tangentvektoren til y.

b) Finn enhetstangentvektoren til y.

c) Vis at y er en glatt kurve.

6. La A være en matrise med egenvektor v og tilhørende egenverdi λ. Vis at

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{v}e^{\lambda t},$$

passer i differensiallikningssystemet

$$\dot{\mathrm{y}}(t) = A\mathrm{y}(t).$$

7. La oss anta at vi har to funksjoner

$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{v}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{og} \quad \mathrm{y}_2 = \mathrm{v}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

der $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er egenverdiene til en matrise, med korresponderende egenvektorer v_1 og v_2. Her er det viktig å skille mellom y_1 og y_2, som er vektorer i et uendeligdimensjonalt vektorrom av vektorfunksjoner, og $\mathrm{y}_1(t)$ og $\mathrm{y}_2(t)$, som er vektorer i $\mathbb{C}^n$.

a) Vis at v_1 og v_2 er lineært uavhengige.

b) Vis at $\mathrm{y}_1(t)$ og $\mathrm{y}_2(t)$ er lineært uavhengige.

c) Vis at y_1 og y_2 er lineært uavhengige.

8. Finn en løsning til differensiallikningene

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t)$$
$$\dot{y}_2(t) = -y_1(t)$$