Kapittel 8

Systemer av differensiallikninger

I dette kapitlet skal vi bruke det vi har lært om lineær algebra til å studere systemer av differensiallikninger.

Fundamentalsystemer

I dette kapiitlet må vi være litt nøye på forskjellen mellom vektorfunksjonen x, som er et element i et uendeligdimensjonalt vektorrom av vektorfunksjoner, og funksjonsverdien $\mathsf{x}(t)$, som er en søylevektor i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$.

Eksempel 8.1. La

$$\mathsf{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathsf{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^{t-1} \end{pmatrix}.$$

Merk at

$$\mathsf{x}(1) = \mathsf{y}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og at

$$\mathsf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

For alle andre verdier av t er $\mathsf{x}(t)$ og $\mathsf{y}(t)$ ikke parallelle. Med andre ord: $\mathsf{x}(t)$ og $\mathsf{y}(t)$ er lineært avhengige for $t = 0$ og $t = 1$, men ikke for andre verdier av t. Som vektorfunksjoner er x og y lineært uavhengige, siden

$$c_1\mathsf{x} + c_2\mathsf{y} = 0$$

impliserer $c_1 = c_2 = 0$. △

Eksempel 8.2. La

$$\mathsf{x}(t) = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{y}(t) = t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathsf{z}(t) = t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

I et tidligere kapittel fant vi at

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

og i dette eksemplet er det lett å se at

$$\mathsf{x} - 2\mathsf{y} + \mathsf{z} = 0.$$

Dette betyr at x, y og z er lineært avhengige som vektorfunksjoner. △

Eksempel 8.3. La nå

$$\mathsf{x}(t) = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{y}(t) = t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathsf{z}(t) = e^t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

De tre vektorene $\mathsf{x}(t)$, $\mathsf{y}(t)$ og $\mathsf{z}(t)$ er lineært avhengige for hver t, for vi kan alltid finne c_1, c_2 og c_3, ikke alle lik null, slik at

$$c_1\mathsf{x}(t) + c_2\mathsf{y}(t) + c_3\mathsf{z}(t) = 0.$$

Men c_1, c_2 og c_3 må endres for hver t, for det er ikke mulig å finne ett enkelt valg slik at likningen

$$c_1\mathsf{x} + c_2\mathsf{y} + c_3\mathsf{z} = 0$$

alltid er sann. Derfor er x, y og z lineært uavhengige som vektorfunksjoner. △

La oss anta at vi har en mengde

$$\mathsf{y}_1, \mathsf{y}_2, \dots, \mathsf{y}_n$$

med vektorfunksjoner. Det er vanlig å sette funksjonene opp som kolonner i en $n \times n$-matrise Y, kalt *fundamentalmatrisen*. Dersom $\det \mathsf{Y}(t) \neq 0$ for alle t, er funksjonsverdiene til mengden en basis for $\mathbb{R}^n$ for hver t, og vi kaller mengden et *fundamentalsystem*.

Eksempel 8.4. Vi kan sette sammen

$$\mathsf{x}(t) = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{y}(t) = e^t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathsf{z}(t) = e^t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

til

$$\mathsf{Y}(t) = e^t\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

og siden $\det \mathsf{Y}(t) = -e^t \neq 0$ for alle t, utgjør x, y og z et fundamentalsystem. △

Eksempel 8.5. La

$$\mathsf{x}(t) = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathsf{y}(t) = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Funksjonene x og y er lineært uavhengige siden det ikke finnes konstanter c_1 og c_2 slik at

$$c_1\mathsf{x} + c_2\mathsf{y} = 0.$$

Men funksjonsverdiene $\mathsf{x}(t)$ og $\mathsf{y}(t)$ er parallelle vektorer for alle t, og derfor utgjør disse funksjonene ikke et fundamentalsystem. △

Systemer av differensiallikninger

I dette kapitlet skal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alltid være en reell matrise. Det blir mer enn komplisert nok. Et *førsteordens lineært og homogent system av differensiallikninger med konstante koeffisienter* er et sett med n likninger og n ukjente

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

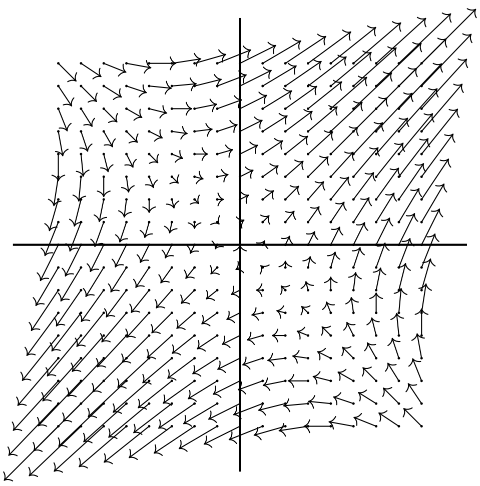
På kortform skriver vi enkelt og greit

$$\dot{\mathrm{y}} = A\mathrm{y}.$$

og forkorter den lange tittelen til *system*.
Før man i det hele tatt begynner å løse systemet over, kan man få en ide om hvordan løsningskurvene kommer til å oppføre seg, ved å skissere systemets *vektorfelt*. Dette får man ved å evaluere høyresiden i likningssystemet for forskjellige verdier av y, slik at man får ut stigningstallet til en eventuell løsningskurve i dette punktet, og så tegne disse i et koordinatsystem.

Eksempel 8.6. Her er en skisse av vektorfeltet assosiert med systemet

$$\dot{\mathrm{y}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{y}.$$



Takk til Paul Trygsland som orket å programmere opp denne figuren. △

En konstant funksjon som løser systemet $\dot{\mathrm{y}} = A\mathrm{y}$, kalles en *likevektsløsning*. Dette er en løsning som står stille i rommet. Merk at dette er alle vektorer i nullrommet til A. Denne klassen av løsninger sitter inni en mer interessant klasse av løsninger, som er beskrevet i neste teorem.

Det er enkelt å finne løsninger

La x være en vektor i $\mathbb{R}^n$, og la

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{v}e^{\lambda t}.$$

Funksjonen y er en løsning av systemet

$$\dot{\mathrm{y}} = A\mathrm{y}$$

hvis og bare hvis λ er en egenverdi, og v den korresponderende egenvektor, til matrisen A.

Bevis. Siden (husk at $e^{\lambda t}$ er en skalar)

$$A\mathrm{y} = A\mathrm{v}e^{\lambda t} = \lambda \mathrm{v}e^{\lambda t}$$

og

$$\dot{\mathrm{y}} = \lambda \mathrm{v}e^{\lambda t}$$

er y en løsning av systemet. Omvendt kan vi se at dersom $\mathrm{v}e^{\lambda t}$ skal være en løsning av systemet, må

$$A\mathrm{v}e^{\lambda t} = \frac{d}{dt}(\mathrm{v}e^{\lambda t}) = \lambda \mathrm{v}e^{\lambda t},$$

og hvis vi deler ut $e^{\lambda t} \neq 0$ får vi

$$A\mathrm{v} = \lambda \mathrm{v},$$

som sier at v er en egenvektor med egenverdi λ. □

Eksempel 8.7. Vi løser systemet

$$\dot{\mathrm{y}} = A\mathrm{y}$$

der

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorer er som kjent

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

med egenverdier -1 og 3, henholdsvis. Derfor er to løsninger av likningssystemet

$$\mathrm{y}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{og} \quad \mathrm{y}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$ △

Eksempel 8.8. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

har egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

med egenverdier henholdsvis 4, 9 og 0. Løsningene av $\dot{\mathrm{y}} = A\mathrm{y}$ er

$$c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{9t} \quad \text{og} \quad c_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Merk at den siste er en likevektsløsning. △

Et vanskelig teorem eller ikke

For systemet
$$\dot{\mathsf{y}} = A\mathsf{y}$$
kan vi alltid finne n kontinuerlig deriverbare løsninger som utgjør et fundamentalsystem.

Det generelle beviset er litt for hardt for oss, men det er lett å se at det må være sant dersom A er diagonaliserbar. Finnes det n lineært uavhengige egenvektorer, finnes det også n løsninger på formen

$$\mathsf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathsf{v},$$

og siden eksponensialfunksjonen aldri er null, er det lett å se at disse løsningene utgjør et fundamentalsystem.
Teoremet er imidlertid sant også for ikkediagonaliserbare matriser, men dette er mer jobb å vise, se Xavier Raynauds notat. Trikset er å sette opp et fundamentalsystem av løsninger på formen

$$\mathsf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathsf{v}(t),$$

der $\mathsf{v}(t)$ er en polynomisk vektorfunksjon basert på noe som kalles *generaliserte egenvektorer*. Dette er viktig i automatisering og regulering.
Siden både venstre- og høyresiden av systemet $\dot{\mathsf{y}} = A\mathsf{y}$ følger superposisjonsprinsippet (begge sider av likningen er lineæroperatorer) er det lett å se at mengden av løsninger danner et vektorrom. Vi skal nå se at dette rommet har nøyaktig n dimensjoner.

Det blir et vektorrom!

Alle løsninger av
$$\dot{\mathsf{y}} = A\mathsf{y}$$
utgjør et vektorrom av dimensjon n.

Bevis. Vi lar Y være et fundamentalsystem av løsninger. Vi at dette finnes. (Dersom A er diagonaliserbar, er det lett å finne et fundamentalsystem. Dersom A ikke er diagonaliserbar, er det vanskeligere, men alltid mulig.) Husk at kolonnene i $\mathsf{Y}(t)$ alltid er lineært uavhengige, slik at $\mathsf{Y}(t)$ kan inverteres for alle t.
La z være en løsning. Siden kolonnene i $\mathsf{Y}(t)$ utgjør en basis for $\mathbb{R}^n$ for alle t, kan vi for hver verdi av t skrive

$$\mathsf{z}(t) = \mathsf{Y}(t)\mathsf{c}(t).$$

og siden $\mathsf{Y}(t)$ er inverterbar for alle t, kan vi skrive

$$\mathsf{Y}^{-1}(t)\mathsf{z}(t) = \mathsf{c}(t),$$

som viser at også c er kontinuerlig deriverbar. Vi kan derfor trygt derivere

$$\dot{\mathsf{z}}(t) = \dot{\mathsf{Y}}(t)\mathsf{c}(t) + \mathsf{Y}(t)\dot{\mathsf{c}}(t),$$

og siden både
$$\dot{\mathsf{z}}(t) = A\mathsf{z}(t)$$
og
$$\dot{\mathsf{Y}}(t)\mathsf{c}(t) = A\mathsf{Y}(t)\mathsf{c}(t) = A\mathsf{z}(t),$$
kansellerer disse mot hverandre, og vi står igjen med

$$0 = \mathsf{Y}(t)\dot{\mathsf{c}}(t).$$

Siden kolonnene i $\mathsf{Y}(t)$ er lineært uavhengige, impliserer denne likningen at $\dot{\mathsf{c}}(t) = 0$, og følgelig er $\mathsf{c}(t)$ en konstant vektor. Men dette betyr at

$$\mathsf{z}(t) = \mathsf{Y}(t)\mathsf{c},$$

og denne likningen sier at funksjonen z er en (konstant) lineærkombinasjon av løsningene i fundamentalsystemet. Disse løsningene utgjør dermed en basis for løsningsrommet, og følgelig er løsningsrommet n-dimensjonalt. □

Fra nå av skal vi studere systemer der matrisen A er diagonaliserbar, slik at løsningen kan skrives

$$\mathsf{y}(t) = c_1\mathsf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathsf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n\mathsf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

der v_k er egenvektorene til A, med korresponderende egenverdier λ_k. Dette kalles *den generelle løsningen*.

Eksempel 8.9. Den generelle løsningen til systemet

$$\dot{\mathsf{y}} = A\mathsf{y}$$

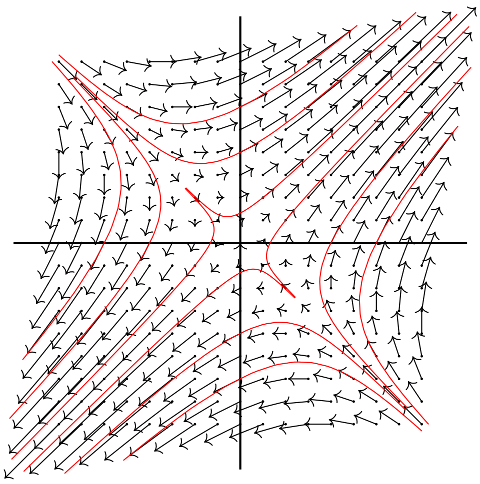
der

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

er

$$\mathsf{y} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

Under er et par løsningskurver, tegnet inn i vektorfeltet til systemet. Merk hvordan løsningene følger flyten i vektorfeltet.



Denne figuren er også laget av Paul Trygsland. △

Eksempel 8.10. Den generelle løsningen til systemet med matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

er

$$\mathsf{y}(t) = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{9t} + c_3\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad △$$

I noen tilfeller er det naturlig å spesifisere et punkt $\mathbb{R}^n$ der løsningskurven skal starte.

Initialverdiproblem

Et *initialverdiproblem* er et likningssystem

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$

med initialbetingelse

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

der $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. En kontinuerlig deriverbar løsning som tilfredsstiller dette kravet, kalles en *spesiell løsning*.

Det er ikke så vanskelig å se at et initialverdiproblem har entydig løsning. Løsningen

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$$

tilfredsstiller helt klart initialbetingelsen $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Anta at det finnes en annen løsning $\mathbf{z}$. Vi vet at $\mathbf{z}$ tilfredsstiller

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c},$$

der $\mathbf{c}$ er en konstant. Men siden $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{y}_0$, må $\mathbf{c} = \mathbf{Y}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$, slik at

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t).$$

Dette er såpass viktig at vi skriver det opp som et teorem.

Det finnes bare en løsning og bra er det

Et initalverdiproblem

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

har entydig løsning.

Eksempel 8.11. Den spesielle løsningen

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{9t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

til systemet i forrige eksempel, starter i punktet

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ved $t = 0$. △

Noen løsninger i planet

Løsninger av diagonaliserbare 2×2-systemer kan klassifiseres ganske greit. Vi skal også ta med et tilfelle der A ikke er diagonaliserbar, for å gi en smakebit på den generelle teorien. Det er gunstig å dele inn i forskjellige tilfeller basert på egenverdiene til A, se på hva som skjer når $t \to \infty$, og plotte noen løsninger i et *fasediagram*.

Reelle og distinkte egenverdier

Løsningen er

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}_2 e^{\lambda_2 t},$$

der både c_1, c_2, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ og $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er relle. Vi illustrerer hva som kan skje med fire eksempler.

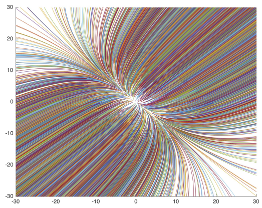
Eksempel 8.12. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}.$$

Merk at uansett hvilke kombinasjoner av c_1 og c_2 vi har (så lenge ikke begge er 0), vil alle løsninger reise mot uendelig når $t \to \infty$, altså vekk fra den eneste likevektsløsningen $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Vi sier derfor at $\mathbf{y}$ er en *ustabil likevektsløsning*. Nedenfor er plot av løsningskurver for et par tusen tilfeldige verdier av c_1 og c_2. △



Eksempel 8.12

Eksempel 8.13. La

$$A = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Uansett hvilke kombinasjoner av c_1 og c_2 vi har, vil alle løsninger søke mot origo når $t \to \infty$, slik at $\mathbf{y}$ er en såkalt *stabil likevektsløsning*. △

Eksempel 8.14. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Dersom $c_1 \neq 0$, vil alle løsninger gå mot uendelig når $t \to \infty$, altså inn mot likevektsløsningen $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Men dersom $c_1 = 0$ og $c_2 \neq 0$, vil løsningen søke mot origo. Likevektsløsningen $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ kalles en *ustabil sadel*. △

Eksempel 8.15. La

$$A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

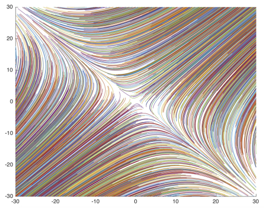
slik at

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

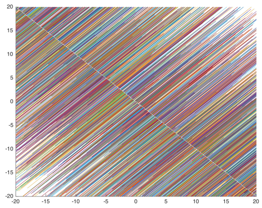
Så lenge $c_1 \neq 0$, vil alle løsninger søke mot likevektsløsningen

$$\mathbf{y} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

og ingen mot $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ når $t \to \infty$. Denne har et litt kjedelig faseplott. △



Eksempel 8.14



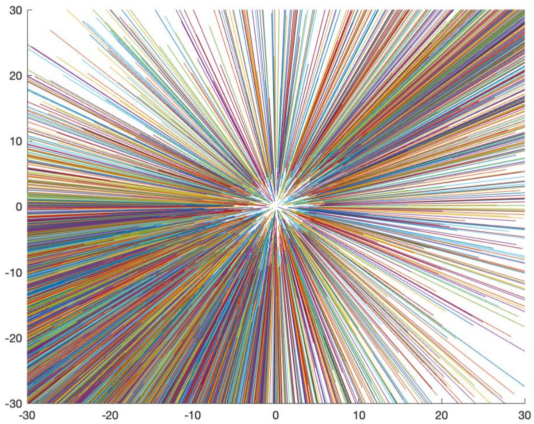
Eksempel 8.15

Eksempel 8.16. La

$$A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathrm{y} = e^{3t}\left(c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right). \qquad \triangle$$



Eksempel 8.16

Komplekse egenverdier

Vi har i øvingsopplegget vist at dersom en reell matrise har komplekse egenverdier, opptrer disse i komplekskonjugerte par. Du har kanskje lagt merke til at dette også gjelder for de egenvektorene, siden

$$A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{\mathrm{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathrm{x}}.$$

Dette skal vi benytte oss av for å plukke ut relle løsninger. La $\lambda = \alpha + \beta i$ ha egenvektor

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},$$

og husk at $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\mathbb{C}os\beta + i\sin\beta)$, slik at

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t) &= c_1e^{\lambda t}\mathrm{x} + c_2e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathrm{x}}\\ &= c_1e^{\alpha t}\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)(\mathbb{C}os\beta t + i\sin\beta t)\\ &\quad + c_2e^{\alpha t}\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)(\mathbb{C}os\beta t - i\sin\beta t).\end{aligned}$$

Denne løsningen er pen på papiret, men vi ønsker å kunne visualisere litt, og da hadde det vært praktisk å finne en løsning som var reell istedet.

Siden $e^{\lambda t}\mathrm{x}$ og $e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathrm{x}}$ er lineært uavhengige for alle t, utgjør de en basis for $\mathbb{C}^2$. La oss søke en reell basis istedet. Vi kaller den nye basisen v_1 og v_2. Velg først $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, og sett

$$\mathrm{v}_1 = e^{\alpha t}\left(\mathbb{C}os\beta t\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} - \sin\beta t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right).$$

Så velger vi $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i}$, og setter

$$\mathrm{v}_2 = e^{\alpha t}\left(\mathbb{C}os\beta t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} + \sin\beta t\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right).$$

Nå kan vi skrive

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t) &= d_1\mathrm{v}_1 + d_2\mathrm{v}_2\\ &= d_1e^{\alpha t}\left(\mathbb{C}os\beta t\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} - \sin\beta t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right)\\ &\quad + d_2e^{\alpha t}\left(\mathbb{C}os\beta t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} + \sin\beta t\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Merk at siden y_1 og y_2 er lineært uavhengige, og forholdet mellom disse og v_1 og v_2 er gitt ved

$$\begin{pmatrix}\mathrm{y}_2 & \mathrm{y}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\1 & i\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_2\end{pmatrix},$$

er også v_1 og v_2 lineært uavhengige for alle t. Fordelen med den nye basisen er at vi nå enkelt kan skille ut alle reelle løsninger ved å holde oss til relle d_1 og d_2.

Eksempel 8.17. La

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

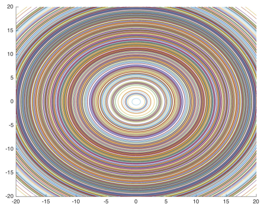
som har egenverdier $\pm i$ og egenvektorer

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}.$$

Den generelle løsningen til systemet blir

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t) &= d_1\left(\mathbb{C}os t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \sin t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &\quad + d_2\left(\mathbb{C}os t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= d_1\begin{pmatrix}\mathbb{C}os t\\-\sin t\end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix}\sin t\\\mathbb{C}os t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{C}os t & \sin t\\-\sin t & \mathbb{C}os t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vi ser at denne løsningen starter i punktet $\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$ ved $t = 0$, og kjører deretter i en pen sirkulær bane om origo. Merk at kurven er traversert med klokken. $\triangle$



Eksempel 8.17

Eksempel 8.18. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

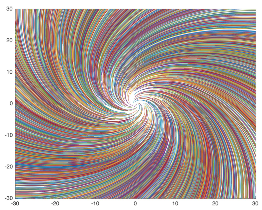
som har egenverdier $1 \pm i$ og de samme egenvektorene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

På samme vis som i forrige eksempel blir den generelle løsningen

$$\begin{aligned} y(t) &= d_1 e^t \begin{pmatrix} \mathbb{C}ost \\ -\sin t \end{pmatrix} + d_2 e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \mathbb{C}ost \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} \mathbb{C}ost & \sin t \\ -\sin t & \mathbb{C}ost \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denne løsningen starter i punktet $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ ved $t = 0$, og kjører deretter i en særdeles vakker sirkulær og utadgående spiral. △



Eksempel 8.18

Eksempel 8.19. La

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

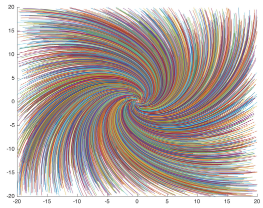
som har egenverdier $-1 \pm i$ og de samme egenvektorene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

På samme vis som i de to forrige eksemplene blir den generelle løsningen

$$\begin{aligned} y(t) &= d_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \mathbb{C}ost \\ -\sin t \end{pmatrix} + d_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \mathbb{C}ost \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \mathbb{C}ost & \sin t \\ -\sin t & \mathbb{C}ost \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denne løsningen starter i punktet $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ ved $t = 0$, og kjører deretter i en innadgående sirkulær spiral. △



Eksempel 8.19

Defekt egenverdi - for spesielt interesserte!

Tilfellet at A ikke er diagonaliserbar, kan vi egentlig ikke analysere med teorien vi har lært til nå, så du skal slippe å kunne det til eksamen. Men vi tar en smakebit på hva som skjuler seg utenfor pensum.

Eksempel 8.20. La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

som har dobbel egenverdi 1, men bare en egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hva gjør vi nå? △

For å løse knipen fra forrige eksempel, må vi gjøre noe artig, nemlig introdusere *generalisert egenvektor*. Egenvektoren til λ finner man ved å finne nullrommet til $A - \lambda I$. For en 2×2-matrise med defekt egenverdi, er en generalisert egenvektor en vektor i nullrommet til $(A - \lambda I)^2$.

Eksempel 8.21. La A være som i forrige eksempel. Nullrommet til

$$(A - I)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

er alle vektorer i $\mathbb{C}^2$. Altså er alle vektorer i $\mathbb{C}^2$ generaliserte egenvektorer til matrisen A. Vi velger oss en tilfeldig vektor som ikke er parallell med $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, for eksempel $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hvis vi ganger denne inn i $A - I$, får vi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

som er en egenvektor. Hm. △

Hvordan bruker vi dette til å løse systemet?

Eksempel 8.22. Vektorene $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ er et eksempel på en *kjede av generaliserte egenvektorer*. Løsningen som korresponderer til den genaliserte egenvektorkjeden $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ er

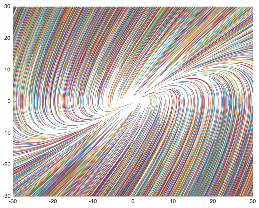
$$y_2(t) = c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Løsningen som korresponderer til egenvektoren vi fant tidligere, er

$$y_1(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette er to lineært uavhengige løsninger, og den generelle løsningen til systemet er

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \qquad \triangle$$



Eksempel 8.22

Inhomogene systemer

Differensiallikningssystemet

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$$

har den fordel at det er lett å skrive opp alle mulige løsninger, alt vi trenger er egenverdiene og egenvektorene til A. Nå skal vi se litt på *førsteordens inhomogent lineært system av differensiallikninger med konstante koeffisienter*. Dette er et likningssystem på formen

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{f},$$

der $\mathbf{f}$ er en spesifisert vektorfunksjon. Tittelen forkorter vi til *inhomogent system*.
Først kan vi merke oss at dersom vi har en løsning $\mathbf{z}$ til det inhomogene systemet, og en løsning $\mathbf{y}$ til det homogene systemet

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y},$$

vil $\mathbf{z} + \mathbf{y}$ løse det inhomogene systemet. Det er derfor vanlig å splitte løsninger i

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$$

der $\mathbf{y}_h$ er den generelle løsningen til det homogene systemet, og $\mathbf{y}_p$ er en løsning til det inhomogene systemet. Den første kalles *den homogene løsningen*, mens den siste kalles enten *den inhomogene løsningen* eller *partikulærløsningen*. Ofte går det an å gjette formen på partikulærløsningen.

Eksempel 8.23. Vi løser likningssystemet

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{f}$$

der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den homogene løsningen er som kjent

$$\mathbf{y}_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

Men hva med den inhomogene? Siden $\mathbf{f}$ er en konstant vektor, er det ikke utenkelig at $\mathbf{y}_p$ også er det. Vi prøver. La

$$\mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Vi setter denne inn i likningen, og får

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette går fint dersom

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som gir

$$\mathbf{y}_p = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Løsningen er med andre ord

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Med litt erfaring kan man ofte gjette formen på $\mathbf{y}_p$, og på internettet er det mulig å finne lange tabeller med hvordan partikulærløsningen $\mathbf{y}_p$ ser ut for forskjellige $\mathbf{f}$. Dette er litt kjedelig å lære seg, men greit å vite om.
Vi skal heller utlede en formel som i prinsippet alltid kan finne $\mathbf{y}_p$. Strategien baserer seg på å ta utgangspunkt i $\mathbf{y}_h$. Vi lar $\mathbf{Y}$ være fundamentalmatrisen. Siden kolonnene i $\mathbf{Y}(t)$ alltid utgjør en basis for $\mathbb{R}^n$, er det rimelig å forvente at en kontinuerlig deriverbar partikulærløsning, dersom den finnes, kan skrives

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}(t).$$

der $\mathbf{c}$ er en vektorfunksjon. Merk at $\mathbf{c}$ ikke kan være en konstant funksjon, for da blir $\mathbf{y}_p$ en homogen løsning. Akkurat som i beviset for teorem **??**, ser vi at $\mathbf{c}$ må være kontinuerlig deriverbar. Vi kan derfor trygt skrive $\mathbf{y}_p t = \dot{\mathbf{Y}}\mathbf{c} + \mathbf{Y}\dot{\mathbf{c}}$, og sette dette inn i den inhomogene likningen:

$$\dot{\mathbf{Y}}\mathbf{c} + \mathbf{Y}\dot{\mathbf{c}} = A\mathbf{Y}\mathbf{c} + \mathbf{f}.$$

Siden

$$\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y},$$

kan likningen forkortes til

$$\mathbf{Y}\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{f},$$

og siden $\mathbf{Y}$ er inverterbar for alle t, kan vi invertere

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{f}$$

og integrere komponentvis

$$\mathbf{c}(t) = \int^t \mathbf{Y}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\, ds.$$

Denne løsningsformelen gir korrekt løsning, dersom det er mulig å utføre integralet på høyre side. Integralet skal tolkes komponentvis, og det trengs ingen nedre integrasjonsgrense, siden denne bare legger til en lineærkombinasjon av homogene løsninger.

Eksempel 8.24. La nok en gang

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{t} \end{pmatrix}$$

og la

$$\mathsf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi beregner

$$\mathsf{Y}^{-1} = \frac{-1}{2e^{4t}} \begin{pmatrix} -e^{t} & -e^{t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

og

$$\mathsf{Y}^{-1}\mathsf{f} = \frac{-1}{2e^{4t}} \begin{pmatrix} -e^{t} & -e^{t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathsf{c}(t) = \int_0^t \mathsf{Y}^{-1}(s)\mathsf{f}(s)\, ds = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathsf{y}_p(t) = \\ -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{t} \\ e^{3t} & -e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

Oppgaver

1. Vis at løsningene til

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_2(t)\\ \dot{y}_2(t) &= -y_1(t)\end{aligned}$$

går i sirkulære baner om origo.

2. Vis at løsningene til

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_1(t) + y_2(t)\\ \dot{y}_2(t) &= -y_1(t) + y_2(t)\end{aligned}$$

blir utadgånde spiraler.

3. Skisser løsningene til systemet

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) - 1\\ \dot{y}_2(t) &= -y_1(t) + y_2(t) - 1\end{aligned}$$

4. Finn den generelle løsningen til systemet

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_1(t) + y_2(t)\\ \dot{y}_2(t) &= y_2(t)\end{aligned}$$

5. Finn den generelle løsningen til systemet

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_1(t) + y_2(t)\\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t) + y_3(t)\\ \dot{y}_3(t) &= y_2(t) + y_3(t)\end{aligned}$$