Kapittel 10

Bølgelikningen

Bølgelikningen er en matematisk beskrivelse av en vibrerende streng, eller en stående luftbølge i en orgelpipe. Vi skal ta for oss selve likningen, hvor den kommer fra, og to forskjellige løsningsteknikker - en for et intervall på x-aksen, og en for hele x-aksen.

Funksjoner av to variable

For å forstå den matematiske beskrivelsen av en vibrerende streng, er vi nødt til å forstå hvordan en funksjon av to variable fungerer. Funksjoner av flere variable kommer for fullt etter sommeren, men vi skal bruke den vibrerende strengen til å smake litt på hva vi har i vente. Dessuten passer det bra, for dette semesteret har vi bygget alt vi trenger for å løse bølgelikningen.

En funksjon av to variable er en funksjon $u : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, der A er et område i $\mathbb{R}^2$. Vi må ha to uavhengige variable, la oss kalle dem x og t. Du kan tenke på x som et punkt på strengen, og på t som et tidspunkt.

Området A trenger ikke være mer komplisert enn et rektangel. Vi skriver

$$A = [a, b] \times [c, d].$$

for området som består av alle punkter (x, t), der $a \leq x \leq b$ og $c \leq t \leq d$, Dette kalles et kartesisk produkt av mengdene $[a, b]$ og $[c, d]$, som begge er intervaller på $\mathbb{R}$. Vi kommer egentlig bare til å trenge

$$A = [0, 1] \times [0, \infty).$$

Eksempel 10.1. Funksjonen $u : [0, 1] \times [0, \infty)$ gitt ved

$$u(x, t) = \sin t \sin \pi x$$

beskriver svingebevegelsen til en streng med lengde 1. Du kan tenke på faktoren $\sin t$ som en tidsvariabel amplitude, mens faktoren $\sin \pi x$ beskriver selve bølgeformen. Du finner en animasjon av en liknende funksjon her: `https://www.youtube.com/watch?v=sWlcWIr9J4E`. △

En av de tingene som fungerer forskjellig fra envariabel funksjonsteori, er derivasjon. Vi har nå to uavhengige variable, x og t, og det er interessant å vite hvordan f endres med hensyn på begge disse to. De to deriverte skrives

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial t},$$

og uttales henholdsvis 'u derivert med hensyn på x' og 't'. Man finner den deriverte med hensyn på x ved å late som alt som avhenger av t er konstant, og så derivere med hensyn på x slik som før. Samme for t.

Eksempel 10.2. Funksjonen $f : [0, 1] \times [0, \infty)$ gitt ved

$$u(x, t) = \sin t \sin \pi x$$

har partiellderiverte

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \pi \sin t \cos \pi x$$

og

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \cos t \sin \pi x.$$

Den deriverte med hensyn på x gir stigningstallet til bølgeformen for en gitt x og t, mens den deriverte med hensyn på t forteller noe som hvor fort et punkt på strengen beveger seg. △

Vi kan fortsette å derivere. Det finnes fire andrederiverte, hvorav to er rene:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u^2}{\partial t^2},$$

og to er blandede:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x \partial t} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u^2}{\partial t \partial x}.$$

De to siste er identiske dersom de er kontinuerlige funksjoner, men det finnes patologiske eksempler der de ikke er like.

Eksempel 10.3. Funksjonen $f : [0, 1] \times [0, \infty)$ gitt ved

$$f(x, t) = \sin t \sin \pi x$$

Har rene andre ordens partiellderiverte

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x, t) = -\pi^2 \sin t \sin \pi x$$

og

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x, t) = -\sin t \sin x$$

og blandede andre ordens partiellderiverte

$$\frac{\partial u^2}{\partial x \partial t}(x, t) = \pi \cos t \sin \pi x$$

og

$$\frac{\partial u^2}{\partial t \partial x}(x, t) = \pi \cos t \sin \pi x$$

og blandede andre ordens partiellderiverte Den rene dobbelderiverte med hensyn på x gir krumningen til bølgeformen for en gitt x og t, mens den dobbelderiverte med hensyn på t forteller noe om akselerasjonen til et punkt på strengen. △

Til slutt kan nevnes at vi skriver

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$$

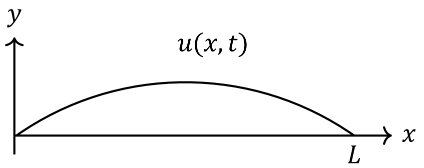
eller

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = u_{xx}$$

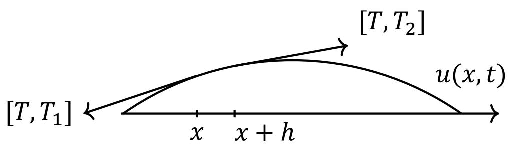
og så videre, når vi ønsker en litt mer minimalistisk notasjon for partiellderiverte.

Utledning

Vi tenker at vi har en vibrerende streng som er spent opp i $x = 0$ og $x = L$. La $u(x, t)$ være en funksjon som for hvert tidspunkt t og hvert punkt x beskriver utslaget fra likevektslinjen, som ligger langs x-aksen. Strengen har konstant massetetthet ρ $[kg/m]$.



Vi tar en nærmere titt på strekkreftene på et lite stykke av strengen. Vi antar at tyngdekraften er neglisjerbar, og at strengen er helt elastisk, slik at strengestrekket, som virker parallelt med strengen, er eneste kraft. Vi antar at hvert punkt på strengen kun beveger seg loddrett, og at den horisontale komponenten av strengestrekket er konstant lik T.



Vi setter opp Newtons andre lov for den lille biten fra x til $x + h$. Massen til en bit med lengde h er $h\rho$, og akselerasjonen til strengen i punktet x er $u_{tt}(x, t)$. Netto kraft på biten er gitt ved $T_2 + T_1$, slik at

$$h\rho u_{tt}(x, t) = T_2 + T_1,$$

eller

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{T} u_{tt}(x, t) &= \frac{T_2/T + T_1/T}{h} \\ &= \frac{u_x(x + h, t) - u_x(x, t)}{h}, \end{aligned}$$

siden stigningstallet til tangenten til strengen er gitt ved u_x. Lar vi nå $h \to 0$, får vi bølgeligningen

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

der $c^2 = \frac{T}{\rho}$.

Oppstilling av problem

Det er ikke nok med en differensialligning som beskriver strengens bevegelse. Vi må også ha informasjon om hvordan bevegelsen blir satt igang, og hvor strengen er spent opp. Et fullstendig oppstilt problem er:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \tag{10.1}$$

med randkrav

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \tag{10.2}$$

og initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \qquad u_t(x, 0) = g(x). \tag{10.3}$$

Selve differensialligningen (10.1) forteller oss hva slags fysiske lover som skal tilfredsstilles (i dette tilfelle Newtons andre lov), eller hva slags oppførsel vi kan forvente av løsningen, for eksempel at det er en vibrerende streng det er snakk om. Randkravene (10.2) forteller oss at strengen er spent opp i $x = 0$ og $x = L$, slik at løsningen står helt i ro der. Initialkravene (10.3) forteller oss noen om hvordan bevegelsen settes i gang; f angir strengens posisjon ved $t = 0$, mens g angir strengens fart ved $t = 0$. Når man spiller en tone på en gitar ved å dra i strengen og slippe den, slik man vanligvis gjør, er $g = 0$. Randkravene

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \tag{10.4}$$

kalles dirichletrandkrav.

Løsningsmetode

Et stort geni har engang tenkt at løsningen på bølgeligningen kan skrives

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Han hadde rett. Innsetting i (10.1) gir

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t).$$

Vi deler på $c^2 F(x)G(t)$ og får

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}.$$

Siden x og t skal kunne varieres uavhengig av hverandre, må vi ha at

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = k$$

der k er en foreløbig ubestemt konstant. Vi ganger opp med $c^2 F(x)G(t)$ og bytter fortegn på k, slik at

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

og

$$G''(t) + kc^2 G(t) = 0.$$

Vi skal først prøve å finne ut hva k kan være. Vi kan bruke F og randkravene

$$u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

til dette. La oss kikke på

$$F''(x) + kF(x) = 0.$$

Dersom $k = 0$, får vi

$$F''(x) = 0$$

som gir

$$F(x) = Ax + B.$$

Er dette en interessant løsning? Vel, nei. Dersom

$$F(0)G(t) = u(0,t) = 0,$$

må enten $F(0) = 0$ eller $G(t) = 0$. At $G(t) = 0$, slik at $u(x,t) = 0$, er en gyldig løsning av bølgelikningen, som også tilfredsstiller randkravene. Men dette er åpenbart ikke en spesielt interessant løsning, så jeg tror vi går for $F(0) = 0$, som impliserer $B = 0$. Det andre randkravet

$$u(L,t) = 0$$

gir likeledes at $F(L) = 0$, altså at $AL = 0$, som impliserer at $A = 0$. Dette impliserer igjen at $u(x,t) = 0$, vi konkluderer at $k = 0$ og $F(x) = 0$ ikke er en interessant løsning av problemet.

La oss prøve $k < 0$. I så fall løses

$$F''(x) + kF(x) = 0$$

av

$$F(x) = Ae^{\sqrt{-k}x} + Be^{-\sqrt{-k}x}$$

Dersom vi nå bruker randkravene, får vi de to likningene

$$A + B = 0$$
$$Ae^{\sqrt{-k}L} + Be^{-\sqrt{-k}L} = 0$$

Dersom $k \neq 0$ (som vi jo allerede vet), er determinanten til dette systemet gitt ved

$$e^{\sqrt{-k}L} + e^{-\sqrt{-k}L} \neq 0$$

og vi konkluderer med at $A = B = 0$, slik at $F(x) = 0$. Altså er heller ikke $k < 0$ en interessant løsning.

Dersom $k > 0$, går alt så meget bedre, og vi får

$$F(x) = A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x.$$

Bruker vi randkravet $u(x,t) = 0$, får vi

$$A = 0,$$

og krever vi

$$F(L) = B\sin(\sqrt{k}L)G(t) = 0,$$

kan dette oppnås ved å sette $B = 0$, som er uinteressant siden da blir $u(x,t) = 0$, eller ved å kreve

$$\sqrt{k}L = n\pi.$$

slik at

$$k = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Vi ser også at $n > 0$, for dersom $n < 0$ byttes bare fortegnet på B, som ennå er ubestemt. Ved å ta en titt på det endelige løsningen av problemet nedenfor, ser man at B kommer til å bli overflødig, så vi velger $B = 1$.

Ligningene

$$G''(t) + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0.$$

løses av

$$G_n(t) = A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t,$$

så de generelle løsningene til bølgeligningen med randkrav (10.2) blir

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= F(x)G_n(t) \\ &= \left(A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x. \end{aligned}$$

Vi har ennå ikke tatt stilling til initialkravene (10.3). Det kan vi klare ved å skrive

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x. \end{aligned}$$

Dersom vi nå krever

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

ser vi at summen til høyre bør være fourierrekken til den odde utvidelsen til f, og følgelig bør

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

På samme vis, dersom

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c\frac{n\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

bør summen til høyre være fourierekken til den odde utvidelsen til g, og følgelig må

$$B_n c\frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

slik at

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$

Når vi skal oppsummere, må vi være litt forsiktige, for vi har ikke sagt noe om deriverbarhet. En løsning av bølgelikningen bør helst være to ganger kontinuerlig deriverbar, men dersom du drar i en gitarstreng med fingeren og slipper strengen, vil f har form som en sagtann, og ikke være deriverbar i punktet der fingeren din holder strengen. (Ihvertfall hvis strengen er elastisk, og fingen din er uendelig tynn.) Av disse grunnene bør man kanskje ikke kalle oppsummeringen for et teorem.

Bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos c\frac{n\pi}{L} t + B_n \sin c\frac{n\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

der

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

og

$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

Bølge på havet

Hvis man ikke ønsker å bruke bøglelikningen til å beskrive en oppspent streng, men heller bølgene fra et steinkast på et endimensjonalt og uendelig langt hav, må man studere bølgelikningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

og ingen randkrav. Her skal løsningen gjelde for alle x, ikke bare på intervallet $[0, L]$

I noen tilfeller kan dette gjøre alt vanskeligere, men akkurat i tilfellet bølgelikningen, blir alt fryktelig enkelt. Det er enkelt å sjekke at funksjonen

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

passer i likningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t).$$

uansett hva ϕ og ψ er, så lenge de er to ganger kontinuerlig deriverbare. Spørsmålet blir bare da hvordan vi skal klare å innpasse initialkravene.

Dersom man bruker

$$u(x,0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$u_t(x,0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \int^x g(t) \, dt + C$$

Vi har nå et lineært 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c} \int^x g(t) \, dt + C$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c} \int^x g(t) \, dt - C$$

Vi setter nå alt sammen igjen

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ =& \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) \\ &+ \frac{1}{2c} \left(\int^{x+ct} g(t) \, dt - \int^{x-ct} g(t) \, dt \right) \\ =& \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(t) \, dt, \end{aligned}$$

og oppsummerer.

Bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

på hele x-aksen, med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(t) \, dt.$$

Oppgaver

Med LF

1. Lag et pythonscript som plotter

$$f(x,t) = \sin t \sin x$$

for forskjellige verdier av t.

2. En stående trykkbølge inne i fløyte, beskrives av problemet

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

Konstanten c avhenger nå av trykket og lydhastigheten i mediet der lydbølgene produseres. (Dersom du spiller på fløyten inni en gassballong full av helium, blir c høyere enn i luft.) Randkravene kalles von-Neumann-randkrav, og L er lengden på fløyten.

Finn løsningen til dette problemet.

Uten LF

3. Vis at varmelikningen

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x)$$

løses av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2 n^2 t} \sin nx,$$

der

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Lag en animasjon av løsningen for $f(x) = \sin x$.

Løsningsforslag

Vi løser problemet på samme måte som for den vibrerende strengen. Den eneste forskjellen blir i forbindelse med løsning av

$$F''(x) + kF(x) = 0.$$

På samme vis må $k > 0$, slik at

$$F(x) = A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x.$$

Siden

$$F'(x) = -A\sqrt{k}\sin\sqrt{k}x + B\sqrt{k}\cos\sqrt{k}x$$

impliserer

$$u_x(0,t) = F'(0) = 0,$$

at $B = 0$, mens

$$u_x(L,t) = F'(x) = -A\sqrt{k}\sin\sqrt{k}L = 0,$$

gir som før at

$$\sqrt{k}L = n\pi.$$

Merk at $n = 0$ er en gyldig løsning her siden en konstant funksjon løser både bølgelikningen og von-Neumann-randkravene. Resten blir som før, men vi må bruke cosinusrekkene til f og g istedet for sinusrekkene. Vi tar ikke resten av regningen.

Bølgeligningen

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

med randkrav

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) =$$
$$A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos c\frac{n\pi}{L}t + B_n\sin c\frac{n\pi}{L}t\right)\cos\frac{n\pi}{L}x,$$

der A er en vilkårlig konstant,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

og

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx.$$