Kapittel 9

Numeriske metoder for systemer av differensiallikninger

Det er bare noen ytterst få differensiallikninger vi kan løse med penn og papir. I dette kapitlet skal vi se på et par numeriske metoder for differensiallikningssystemer. Da er det nyttig å vite at alle differensiallikninger kan skrives om til førsteordens systemer, for dette reduserer antall metoder man må lære seg betraktelig.

Eksempel 9.1. Differensiallikningen for en pendel er

$$\ddot{y} + \sin y = 0.$$

Vi skriver denne om til et system ved å sette $z = \dot{y}$, slik at

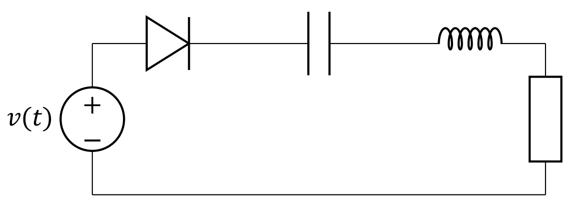
$$\begin{aligned} \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -\sin y \end{aligned} \qquad \triangle$$

Eksempel 9.2. Summer du spenningsfallet over kretsen under og deriverer alt, får du

$$\dot{v}(t) = \frac{V_0 \dot{i}(t)}{i_0 + i(t)} + \frac{i(t)}{C} + L\ddot{i}(t) + R\dot{i}(t)$$

Vi skriver også denne om til et system ved å sette $y = i$ $z = \dot{i}$, slik at

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z \\ L\dot{z} &= \dot{v}(t) - \frac{V_0 z}{i_0 + y} - \frac{y}{C} - Rz \end{aligned} \qquad \triangle$$



Eksempel 9.3. Noen modeller må skrives opp direkte som differensiallikningssystemer. Lotka-Volterra-systemet

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y(2 - z) \\ \dot{z} &= z(y - 1) \end{aligned}$$

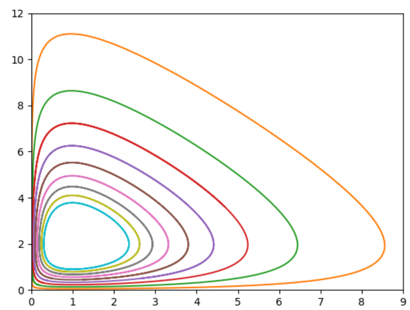
beskriver to dyrepopulasjoner, der den ene driver med predasjon på den andre. Dersom det er mange mus (y) på Revneset, får jorduglen (z) rikelig med mat til ungene sine, og kan legge opp til 14 egg. Men jorduglen er en trekkfugl, og er det ikke smågnagerår, gidder den ikke hekke i Norge engang. Hvis vi deler likningene på hverandre, samler y og z på hver sin side:

$$\dot{y}\left(1 - \frac{1}{y}\right) = \dot{z}\left(\frac{2}{z} - 1\right)$$

og integrerer, får vi

$$y - \log y = 2\log z - z + C.$$

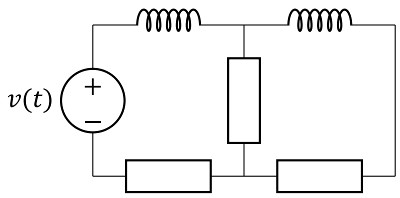
Her har vi en implisitt likning som alle løsninger må tilfredsstille. Forskjellige verdier av C gir forskjellige lukkede løsningskurver, men vi har ikke funnet en funksjon som løser problemet. Se figuren under. $\triangle$



Eksempel 9.4. Andre situasjoner må ikke nødvendigvis modelleres som systemer av differensiallikninger, men det er veldig praktisk å gjøre det. Summer du spenningsfallet over hver sløyfe i kretsen under (med $L = 1$ og $R = 1$), får du:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2y + z + v \\ \dot{z} &= \quad y - 2z \end{aligned}$$

Her er y og z de ukjente maskestrømmene, mens v er gitt. $\triangle$



Eksempel 9.5. En likning som opprinnelig dukket opp i radiorørteknologi, kalles van der Pols likning:

$$\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0$$

Siden har det blitt oppdaget at den kan brukes til andre ting, for eksempel modellering nevroner eller sprekker mellom kontinentalplater. Skriver vi $y = x$ og $z = \dot{x}$, får vi systemet

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= \mu\left(1 - y^2\right)z - y. \end{aligned} \qquad \triangle$$

I høst så differensiallikningen slik ut:

$$\dot{y} = f(y)$$

Nå ser det slik ut

$$\begin{aligned}\dot{y} &= f(y,z)\\ \dot{z} &= g(y,z)\end{aligned}$$

De numeriske metodene fungerer ganske likt. Vi skriver opp fire av dem. Eksplisitt Euler:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + hf(y_i, z_i)\\ z_{i+1} &= z_i + hg(y_i, z_i)\end{aligned}$$

Implisitt Euler:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + hf(y_{i+1}, z_{i+1})\\ z_{i+1} &= z_i + hg(y_{i+1}, z_{i+1})\end{aligned}$$

Symplektisk Euler (denne finnes kun for systemer):

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + hf(y_i, z_i)\\ z_{i+1} &= z_i + hg(y_{i+1}, z_i)\end{aligned}$$

Trapesmetoden:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + h\left(\frac{f(y_i, z_i) + f(y_{i+1}, z_{i+1})}{2}\right)\\ z_{i+1} &= z_i + h\left(\frac{g(y_i, z_i) + g(y_{i+1}, z_{i+1})}{2}\right)\end{aligned}$$

Eksempel 9.6. Differensiallikningen for en pendel er

$$\begin{aligned}\dot{y} &= z\\ \dot{z} &= -\sin y\end{aligned}$$

Eksplisitt Euler:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + hz_i\\ z_{i+1} &= z_i - h\sin y_i\end{aligned}$$

Imsplisitt Euler:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + hz_{i+1}\\ z_{i+1} &= z_i - h\sin y_{i+1}\end{aligned}$$

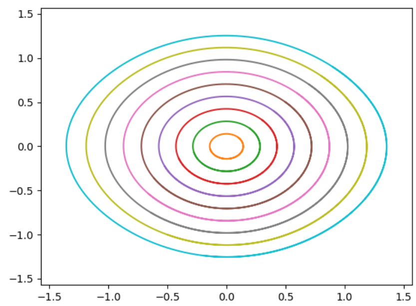
Symplektisk Euler

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + hz_i\\ z_{i+1} &= z_i - h\sin y_{i+1}\end{aligned}$$

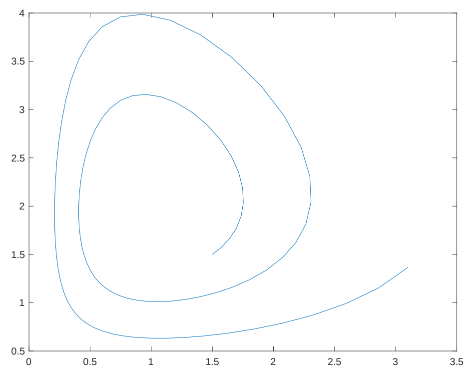
Trapesmetoden:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(z_i + z_{i+1})\\ z_{i+1} &= z_i - \frac{h}{2}(\sin y_i + \sin y_{i+1})\end{aligned}$$

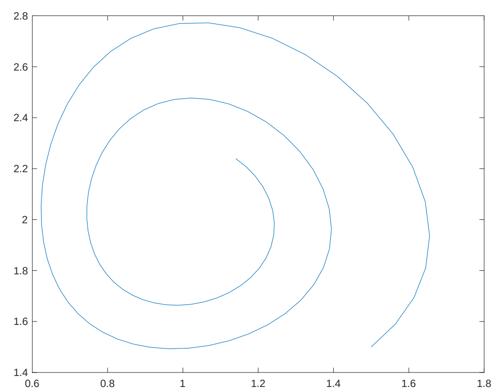
På de implisitte metodene må man kjøre en eller annen flerdimensjonal likningsløser for å finne (y_{i+1}, z_{i+1}) i hvert steg. Symplektisk Euler har noen artige egenskaper som vi skal komme tilbake til. Under er et plot av noen løsninger. △



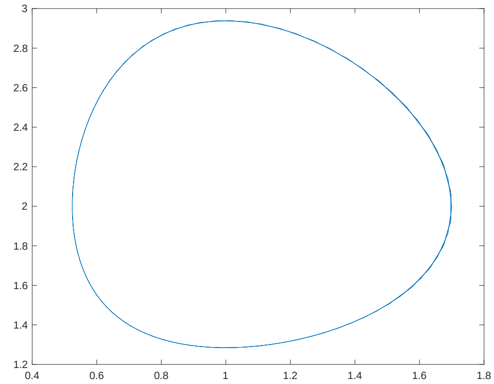
Eksempel 9.7. Vi løser Lotka-Volterra-systemet med eksplisitt Euler og $h = 0.1$, og får figuren under. Løsningskurven starter i $(1.5, 1.5)$. Eksplisitt Euler lager en utadgående spiral, men dette må være tull, for vi vet jo at løsningene skal ligge på en lukket kurve. △



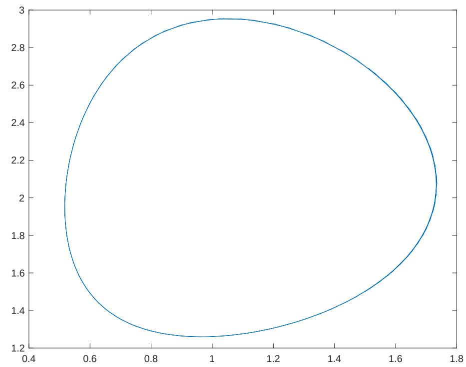
Eksempel 9.8. Nå kjører vi implisitt euler med $h = 0.1$, og får får følgende figur. Nå lager metoden en innadgående spiral! △



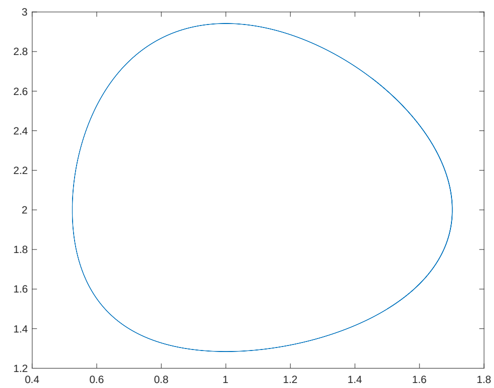
Eksempel 9.9. Her er trapesmetoden. Den klarer seg visst mye bedre, selv med $h = 0.1$. △



Eksempel 9.10. Symplektisk Euler er litt spesiell fordi den ikke har noen ekvivalendt i envariabel kalkulus. Trikset er veldig enkelt, vi nyttiggjør oss y_{i+1} i den andre likningen så snart den er beregnet i den første. Denne metoden kalles semi-implisitt, og produserer en like pen figur som trapesmetoden. △

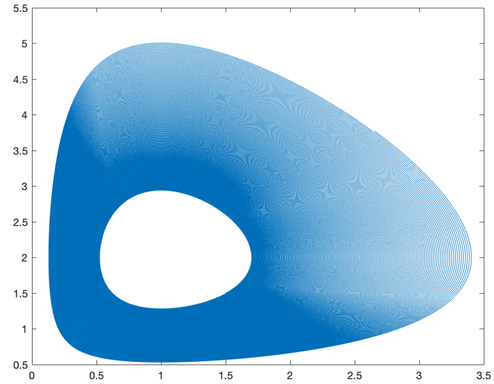


Eksempel 9.11. Vi løser Lotka-Volterra-systemet med eksplisitt Euler og $h = 0.0001$, og får figuren under. Man kan her bli forledet til å tro at liten nok h løser alle problemer, men... △



Eksempel 9.12. nå tar vi eksplisitt Euler med $h = 0.001$, men for $t \in [0, 1000]$. FIguren under viser hva som skjer.

Den numeriske løsningen holder seg ikke på de lukkede banene vi vet den skal, men spiraliserer utover. Det er ingen bug i koden. Det er faktisk bare eksplisitt Euler som ikke greier å løse dette problemet numerisk på en fornuftig måte. △



Løsningene til L-V-systemet skal definitivt være lukkede baner, og det ser ut til at trapesmetoden og symplektisk Euler klarer noe som ikke eksplisitt og implisitt Euler klarer. Numeriske metoder for differensialliknigner er mer enn bare presisjon og desimaler. Dette er for øvrig også et forskningsfelt som kalles geometrisk integrasjon - studiet om artige fenomener i numerisk løsning av differensiallikninger.

Oppgaver

Med LF

Uten LF

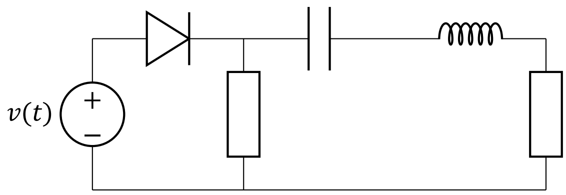
1. Reproduser figurene for Lotka-Volterra-systemet med eksplisitt Euler og symplektisk Euler.

2. Gjenta for pendelsystemet.

3. Gjenta for kretsen i eksempel 9.4 (velg passende verdier for kretselementene) og sammenlikne med den analytiske løsningen.

4. Gjenta for kretsen i eksempel 9.2.

5. Gjenta for denne kresten (obs her blir det 3×3):



6. Reproduser figurene for Lotka-Volterra-systemet med imsplisitt Euler og trapesmetoden. Her må man bruke en flerdimensjonal likningsløser i hver iterasjon. Det er egentlig ikke en god ide å bruke fikspunktiterasjoen, men det er det som er det letteste å få til, siden iterasjonen allerede er skrevet på fikspunktform:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{F}\left(\mathbf{y}_{i+1}\right).$$

Løsningsforslag

1.