Indreproduktrom

Repetisjon: vektorrom er en mengde V med en kropp $\mathbb{F}$ (vanligvis $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) og operasjonene vektoraddisjon $V \times V \longrightarrow V$ og skalarmultiplikasjon $\mathbb{F} \times V \longrightarrow V$ + aksiomer (regneregler)

Merk: ingen produkt av vektorer, så $u, v \in V$ så er ikke uv eller $u \cdot v$ definert.

Men det går an å definere produkter av vektorer i noen tilfeller

La V være et vektorrom over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Et indreprodukt på V er en avbildning $\langle -,- \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, så for $v, w \in V$ har vi $\langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$, som tilfredstiller:

- symmetri: $\forall v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- lineært i 1. argument: $\forall u, v, w$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$
- positivt definitt: $\forall v \in V$, $v \neq 0$, $\langle v, v \rangle > 0$

Kan vise at i.p. er lineært i 2. argument, $\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$ [se ERT]

Eksempler: Skalarprodukt er et indreprodukt. Viser for $n = 2$, $v \cdot w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

- $v \cdot w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = w_1 v_1 + w_2 v_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = w \cdot v$
- $(au + bv) \cdot w = \begin{bmatrix} au_1 + bv_1 \\ au_2 + bv_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = (au_1 + bv_1)w_1 + (au_2 + bv_2)w_2 = au_1 w_1 + bv_1 w_1 + au_2 w_2 + bv_2 w_2$

$$= (au_1 w_1 + au_2 w_2) + (bv_1 w_1 + bv_2 w_2) = a(u_1 w_1 + u_2 w_2) + b(v_1 w_1 + v_2 w_2)$$

$$= a\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right) + b\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right) = a(u \cdot w) + b(v \cdot w)$$

- $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v \cdot v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1^2 + v_2^2 > 0$ fordi $v_1, v_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ skalarprodukt (for dim 2) er et indreprodukt

Generell: $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, w \rangle := v^T w = [v_1 \; v_2 \ldots v_n] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ ← matriseprodukt

Et indreproduktrom er et vektorrom som også har et indreprodukt.

Rart eksempel: $x(t), y(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er funksjoner, for $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$$

er et indreprodukt.

Merk: vi kan ha flere i.p. på samme vektorrom. E.g. velg andre a, b.

Komplekst indreprodukt: vektorrom V med $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Et i.p. på V ($V \times V \to \mathbb{C}$) er det samme som for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, med unntak av symmetri. I stedet så har vi konjugert:

$\forall v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

← konjugert: $\overline{a + bi} = a - bi$

La V være et vektorrom over $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Et indre produkt på V er en avbildning $(-,-) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, så for $v, w \in V$ har vi $(v,w) \in \mathbb{C}$, som tilfredstiller:

- symmetri : $\forall v,w \in V$, $(v,w) = \overline{(w,v)}$
- lineært i 1. argument: $\forall u,v,w$, $\forall a,b \in \mathbb{C}$, $(au + bv, w) = a(u,w) + b(v,w)$
- positivt definitt : $\forall v \in V$, $v \neq 0$, $(v,v) > 0$

Når $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, så har vi lineært i 2. arg. For $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, så får vi antilinearitet:
$\forall u,v,w \in V$, $a,b \in \mathbb{C}$, $(u, av + bw) = \bar{a}(u,v) + \bar{b}(u,w)$

Obs: Noen steder bruker lineært i 2. argument som aksiom, da får man antilineært i 1. argument.

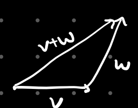
Eksempel: $\cdot\ v,w \in \mathbb{C}^n$, $(v,w) := \overline{v}^T w = \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} w_k$

Norm / lengde: hvis $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

kan vi skrive om til $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

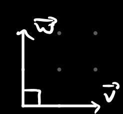
For et vektorrom V, så er en norm / lengde $\|-\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ er en avbildning som tilfredstiller

- for $v \in V$, $v \neq 0$, $\|v\| > 0$
- $\|av\| = |a| \|v\|$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



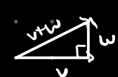
Hvis V er et i.p. rom med i.p. $(-,-)$. Da er $\|v\| := \sqrt{(v,v)}$ er en norm

Ortogonalitet: $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er ortogonale, $\vec{v} \perp \vec{w}$, hvis $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$



For et i.p. rom V, så sier vi at $v,w \in V$ er ortogonale hvis $(v,w) = 0$.

Teorem (Pytagoras): $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff (v,w) = 0$

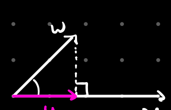


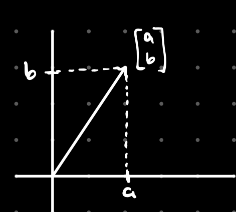
Bevis: $\|v+w\|^2 = (v+w, v+w) = (v,v) + (v,w) + (w,v) + (w,w)$
$= \|v\|^2 + 2(v,w) + \|w\|^2$

Hvis $(v,w) = 0 \implies \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 0 + \|w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

Hvis $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \implies \|v\|^2 + 2(v,w) + \|w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$
$\implies 2(v,w) = 0 \implies (v,w) = 0$

Projeksjon: For vektorer i $\mathbb{R}^n$,





u er projeksjonen av $\vec{w}$ på $\vec{v}$

Formel : $u = \dfrac{v \cdot w}{v \cdot v} v = \dfrac{v \cdot w}{\|v\|^2} v$

For i.p. rom V, ortogonal projeksjon på $v^{\in V}$ gitt ved $P_v(w) = \frac{(v,w)}{(v,v)} v$ for $w \in V$

Repetisjon: en basis for V er en mengde vektorer $\{b_1, \dots, b_n\}$ i V slik at

- de er lineært uavhengige: $c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = 0 \implies c_1 = \dots c_n = 0$
- de spenner ut V: $\forall v \in V,\ \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ slik at $v = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$

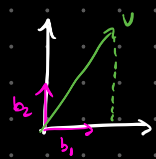
Basiser er ikke unike, men antallet vektorer i basisen (dim) er unikt.

En basis er ortogonal hvis $(b_i, b_j) = 0 \ \forall i \neq j$ og $(b_i, b_i) \neq 0$
Basisen er ortonormal hvis den i tillegg $(b_i, b_i) = 1$.

Ortogonale og -normale basiser er veldig gode basieser!
Fordi det er lett å skrive vektorer som lin. komb. av basisen.

Hvis $b_1, \dots, b_n$ ortogonal basis for V og $v \in V \implies v = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$ hvor $c_k = \frac{(b_k, v)}{(b_k, b_k)} \leftarrow \neq 0$
Hvis ortonormal, er nevneren er 1

Merk at c_k er koeffisienten i $P_{b_k}(v) = \frac{(b_k, v)}{(b_k, b_k)} b_k$



Viktig: enhver endeligdimensjonalt vektorrom har en ortogonal basis!

Gitt en (ikke ort.) basis $b_1, \dots, b_n$ av V, kan vi finne en ortogonal /-normal basis som følgende:

Gram - Schmidt:

$$u_1 = b_1$$
$$u_2 = b_2 - P_{u_1}(b_2)$$
$$u_3 = b_3 - P_{u_1}(b_3) - P_{u_2}(b_3)$$
$$\vdots$$
$$u_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} P_{u_i}(b_k) \qquad e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

$\implies \{u_1, \dots, u_n\}$ er en ortogonal basis for V, $\{e_1, \dots, e_n\}$ er ortonormal basis for V.

Merk at dimensjonen til V er ivaretatt.