# Laplace transformasjoner

Happy π-day ü

**Integral transformasjoner:** En integral transformasjon $T$ er en operator som tar en funksjon $f$ og gir en annen funksjon $Tf$ fra et annet funksjonsrom.

**Hvorfor?**

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Vanskelig problem}} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "T"] & \boxed{\text{Løsningen på vanskelig problem}} \\
\boxed{\text{Lettere problem}} \arrow[r, "\text{løs}"] & \boxed{\text{Løsningen på lett problem}} \arrow[u, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Kalles <u>integral</u> transformasjon fordi $Tf$ lages ved å putte $f$ inn i et spesielt integral. Hvilket integral som brukes kommer an på hvilken transformasjon vi bruker.

## Laplace transformasjoner:

Hvis $f(t)$ er en funksjon definert på $t \geq 0$, da er laplace transformasjonen $\mathcal{L}(f)$ definert som:

fancy L

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)\, \underbrace{e^{-st}}_{\text{erstatt for å få andre int.tr.}}\, dt = F(s)$$

Skriver $\mathcal{L}(f)$, men det er egentlig funksjon i $s$, så skriver også $F(s)$.

Siden øvre grense er $\infty$, så burde være sikker på at $\mathcal{L}(f)$ konverger:

**Teorem:** $f$ stykkvis kontinuerlig, $a, M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ sånn at $|f(t)| \leq Me^{at}$ for $t \geq 0$
Hvis $s > a \Rightarrow \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ konverger absolutt.

I praksis ser vi bare på eksempler som faktisk konvergerer.

**Eksempel:** $f(t) = \cos(t)$

$$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos(t)) = \int_0^\infty \cos(t)e^{-st}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{it}+e^{-it})e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(i-s)t}}{i-s} - \frac{e^{-(i+s)t}}{i+s}\right]_0^\infty$$

$$e^{(i-s)t} = e^{it}e^{-st} = (\cos(t) + i\sin(t))e^{-st} \rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \frac{1}{i-s} - 0 + \frac{1}{i+s}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+i}{(s-i)(s+i)} + \frac{s-i}{(s+i)(s-i)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+1} = \underline{\underline{\frac{s}{s^2+1}}}$$

Linearitet: $f(t)$, $g(t)$ er sånn at laplacetr. finnes og $a, b$ er konstanter

$$\Rightarrow \mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$$

(derfor $\mathcal{L}$ er en <u>linearoperator</u>)

Bevis: $$\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = \int_0^\infty (af(t) + bg(t))e^{-st}\,dt$$
$$= \int_0^\infty af(t)e^{-st} + bg(t)e^{-st}\,dt$$
$$= \int_0^\infty af(t)e^{-st}\,dt + \int_0^\infty bg(t)e^{-st}\,dt$$
$$= a\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt$$
$$= a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$$

Dette er nyttig fordi vi kan finne $\mathcal{L}(f)$ for komplisert $f$ ved å finne laplacetr. av "delene" av $f$. Altså, i stedet for å løse et vanskelig integral, kan vi løse flere lettere integraler.

Anbefaling: regn mange $\mathcal{L}(f)$!

Men i praksis: bruker tabeller

**Table 6.1** Some Functions $f(t)$ and Their Laplace Transforms $\mathcal{L}(f)$

| | $f(t)$ | $\mathcal{L}(f)$ | | $f(t)$ | $\mathcal{L}(f)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1$ | $1/s$ | 7 | $\cos \omega t$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| 2 | $t$ | $1/s^2$ | 8 | $\sin \omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| 3 | $t^2$ | $2!/s^3$ | 9 | $\cosh at$ | $\dfrac{s}{s^2-a^2}$ |
| 4 | $t^n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ | 10 | $\sinh at$ | $\dfrac{a}{s^2-a^2}$ |
| 5 | $t^a$ ($a$ positive) | $\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ | 11 | $e^{at}\cos \omega t$ | $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ |
| 6 | $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}$ | 12 | $e^{at}\sin \omega t$ | $\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ |

Kreyszig

Disse tabellene brukes også for å finne inverstransformasjonene $\mathcal{L}^{-1}(f)$

Andre regneregler:

- $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$
- $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$

$\Big\}$ se ERT

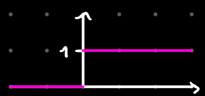
- For $g(t) = \int_0^t f(t)\,dt \Rightarrow \mathcal{L}(g) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$

For $f, g$, konvolusjonen mellom dem er $f * g = \int_0^t f(p)\, g(t-p)\, dp$

Da har vi $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)$

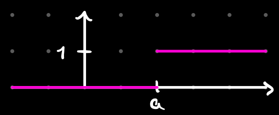
**s-shift**: Hvis $\mathcal{L}(f) = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a)$

**Heaviside funksjonen**: $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$




← av/på knapp

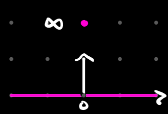
Variant: $u(t-a) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$




**t-shift**: La $\mathcal{L}(f) = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}(f(t-a)\,u(t-a)) = e^{-as} F(s)$

hvor $f(t-a)\,u(t-a) = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$ ← forskjøvet hele $f$ med tid $a$

**Dirac delta "funksjonen"**: $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$




ekstremt mye kraft i et kort øyeblikk; e.g. hammerslag; høyt smell

Variant: $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$

Eksempel: $y'' - y = t \quad , \; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$

Bruk $\mathcal{L}$ på begge sider av ligningen

$\Rightarrow \cdot\, \mathcal{L}(y'' - y) = \mathcal{L}(y'') - \mathcal{L}(y)$

$= s^2 \mathcal{L}(y) - s\,y(0) - y'(0) - \mathcal{L}(y)$

$= s^2 \mathcal{L}(y) - s \cdot 1 - 1 - \mathcal{L}(y)$

$= (s^2 - 1)\mathcal{L}(y) - s - 1$

$\cdot\; \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$

$\Rightarrow (s^2 - 1)\mathcal{L}(y) - s - 1 = \frac{1}{s^2}$

$\Rightarrow (s^2 - 1)\mathcal{L}(y) = s + 1 + \frac{1}{s^2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{s+1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}$

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s^2-1} \Rightarrow 1 = A(s^2-1) + Bs^2 = s^2(A+B) - A \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=-1 \ , B=1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{s+1}{(s+1)(s-1)} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}$$

Fra: $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ , $\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}$ , $\mathcal{L}(\sinh(t)) = \frac{1}{s^2-1}$

$$\Rightarrow y(t) = \underline{\underline{e^t + \sinh(t) - t}}$$

Oppsummering:

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{y'' - y = t \ , \ y(0)=1, \ y'(0)=1} & \dashrightarrow & \boxed{y(t) = e^t + \sinh(t) - t} \\
\Big\downarrow \mathcal{L}(y) = Y & & \Big\uparrow \mathcal{L}^{-1} \\
\boxed{(s^2-1)Y = s+1 + \frac{1}{s^2}} & \longrightarrow & \boxed{Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}}
\end{array}$$

diff. ligninger

enkle ligninger

Vanligvis:
- Finne $y_h$
- Finne $y_p$
- Skrive opp generell løsning
- Bruke initialbetingelsene

Her:
- Regne ut enkle transformasjon / slå opp i tabell
- Løse enkle ligninger

Merk: initialbetingelsene ble brukt underveis, så $y(t)$ vi fikk er den spesifikke løsningen. Så med laplacetransformasjoner, så slipper vi å finne generell løsning.