Systemer av differensialligninger

Tidligere: • systemer av lineære ligninger e.g. $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

• diff.ligninger e.g. $\dot{y} + ay = b$, $\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t)$

I dag: systemer av diffligninger

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \dots + a_{1n}y_n(t) \\ \dot{y}_2(t) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \dots + a_{2n}y_n(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \dots + a_{nn}y_n(t) \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \iff \dot{\vec{y}} = A\vec{y}$$

Vi leter etter flere funksjoner $y_1, \dots, y_n$ samtidig. Vil fokusere $n = 2, 3$

Egenverdier og egenvektorer

Husk: A matrise $\Rightarrow$ λ er en egenverdi for A hvis $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ og $\vec{v}$ er da en egenvektor som hører til λ.

Gitt $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$, la $\vec{y}(t) = \vec{v}e^{\lambda t}$ for en vektor $\vec{v}$ og et tall λ.
Da har vi:

$\vec{y}(t)$ er en løsning på systemet $\iff$ λ er en egenverdi for A og $\vec{v}$ er en egenvektor til λ

Bevis: $\boxed{\Rightarrow}$ Antar at $\vec{y}(t)$ er en løsning, så $\dot{\vec{y}}(t) = \lambda\vec{v}e^{\lambda t}$ og $A\vec{y}(t) = A\vec{v}e^{\lambda t}$

$\Rightarrow A\vec{v}e^{\lambda t} = \lambda\vec{v}e^{\lambda t}$. $e^{\lambda t} \neq 0$ så vi kan dele på den

$\Rightarrow A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\Rightarrow$ λ egenverdi, $\vec{v}$ egenvektor

$\boxed{\Leftarrow}$ Antar λ er en egenverdi og $\vec{v}$ er en egenvektor

$\Rightarrow \dot{\vec{y}}(t) = \lambda\vec{v}e^{\lambda t} = A\vec{v}e^{\lambda t} = A\vec{y}(t)$ $\Rightarrow$ $\vec{y}(t)$ er en løsning ∎

Viktig: Alle løsninger av $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ utgjør et vektorrom av dimensjon n.

Husk: Hvis $\vec{v}, \vec{w} \in V$ og $a, b \in \mathbb{F}$ $\Rightarrow$ $a\vec{v} + b\vec{w} \in V$

Dermed: når vi løser $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$, da leter vi etter n lineært uavhengige løsninger $\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n}$ og vi lar disse være basisen for vektorrommet av løsninger

$\Rightarrow$ den generelle formen til en vektor i dette rommet er $c_1\vec{y_1} + \dots + c_n\vec{y_n}$, og dette er da den generelle formen til en løsning på systemet.

Så vi leter etter generell løsning $\vec{y} = c_1\vec{y_1} + \dots + c_n\vec{y}_n$.

Eksempel: $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ hvor $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 6 & 2\\ 2 & 2 & 6\end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 6-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 6-\lambda\end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-9) \Rightarrow \lambda = 0, 4, 9$$

- $\lambda_1 = 0$: $(A - \lambda_1 I_3)\vec{v} = 0$ $\qquad \vec{v} = \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 6 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 6 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 4v_3 = 0\\ v_2 - v_3 = 0\end{cases}$$ La $v_3 = s$ være fri

$$\Rightarrow v_1 = -4s,\ v_2 = s \quad \Rightarrow \quad \vec{v_1} = \begin{bmatrix}-4\\ 1\\ 1\end{bmatrix}s$$

- $\lambda_2 = 4$: $$\left[\begin{array}{ccc|c}-3 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0\\ v_2 = -v_3\end{cases}$$ $\Rightarrow$ La $v_3 = s$ vær fri $\Rightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}s$

- $\lambda_3 = 9$: $$\left[\begin{array}{ccc|c}-8 & 2 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -3 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 = v_3\\ v_2 = v_3\end{cases}$$ La $v_1 = s$ $\Rightarrow \vec{v_3} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}s$

$$\Rightarrow \vec{y_1}(t) = \vec{v_1}e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix}-4\\ 1\\ 1\end{bmatrix}e^{0\cdot t} = \begin{bmatrix}-4\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad \vec{y_2}(t) = \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}e^{4t},\quad \vec{y_3}(t) = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}e^{9t}$$

$$\Rightarrow \vec{y}(t) = c_1\vec{y_1}(t) + c_2\vec{y_2}(t) + c_3\vec{y_3}(t)$$
$$= c_1\begin{bmatrix}-4\\ 1\\ 1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}e^{4t} + c_3\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}e^{9t}$$

Akkurat som med andre diff.ligninger så trenger vi initialbetingelser for å bestemme koeffisientene.

Her ser en initialbetingelse ut som $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ for kjente a, b, c.

Men A har ikke alltid n lineært uavhengige vektorer, altså A er ikke alltid diagonaliserbar.

Heldigvis, vi kan fortsatt finne n lineært uavhengige løsninger på $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ ved å bruke <u>generaliserte egenvektorer</u>. (se link ERT-fil)

For $n = 2$ kan vi plotte løsningene på et system ved å bruke faseplanet:

Eksempel: $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ for $A = \begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ har generell løsning $\vec{y}(t) = c_1\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{3t} + c_2\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{-t} = \begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}$

Vi plotter faseplanet ved å sette $y_1(t)$ på x-aksen og $y_2(t)$ på y-aksen.

Kan også løse systemer av diffligninger med laplacetransformasjoner. Se eksempel i ERT-fil.
For å gjøre dette:
- bruk $\mathcal{L}$ på begge sider av alle ligningen
- løs systemet av ligninger (altså bruk lineær algebra)
- bruk $\mathcal{L}^{-1}$ på alt

Numerikk

Som før, ikke alle systemer av diffligninger kan løses for hånd. Så vi har numeriske metoder for systemer:

For et problem $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ så løser vi dette numerisk ved å velge startverdier x_0 og y_0, en steglengde h, og så bruker vi formler for å regne x_{i+1} og y_{i+1}.

Eksplisitt Euler:
$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + hg(x_i, y_i)$$

Implisitt Euler:
$$x_{i+1} = x_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$
$$y_{i+1} = y_i + hg(x_{i+1}, y_{i+1})$$

Trapesmetoden:
$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(g(x_i, y_i) + g(x_{i+1}, y_{i+1})\right)$$

implisitte metoder: bruker x_{i+1} og y_{i+1} før vi har regnet dem ut

I praksis: bruker i stedet midlertidige verdier x^*_{i+1} og y^*_{i+1} som vi kan finne f.eks. med numeriske ligningsløsere som Newtons metode

Symplektisk Euler:
$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + hg(x_{i+1}, y_i)$$

I implementasjoner så regnes x_{i+1} ut før vi kommer hit, så vi kan bruke den til å regne ut y_{i+1}.

Eksempel: $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ for $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x,y) = x - 2y \\ g(x,y) = -2x + y \end{array}$$