## Ikke-lineære differensialligninger

[Basert på "Ikke-lineære systemer" av Magnus Ørke]

Oppsummering av diffligninger så langt:

- 1. ordens: $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$

  hvis $q(t) = 0 \Rightarrow$ separabel
  hvis $q(t) \neq 0 \Rightarrow$ lineær, løs med integrerende faktor

  I begge tilfeller, hvis $p$ og/eller $q$ er konstante $\Rightarrow$ mye lettere!

- 2. ordens: $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = f(t)$

  hvis $p$ og $q$ er konstante $\Rightarrow$ løs med karakteristiske ligning $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ for å finne homogen løsning $y_h$.

  hvis $f(t) = 0 \Rightarrow y = y_h$
  hvis $f(t) \neq 0 \Rightarrow$ må i tillegg finne partikulærløsning $y_p$, og $y = y_h + y_p$

  hvis $p(t)$ og $q(t)$ ikke er konstante $\Rightarrow$ vi har ikke sett på dette, men vi har teknikker for dette. Kommer an på hordan $f$ ser ut.

[- n-te ordens med konstante koeffisienter: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$
  kan løses med karakteristisk ligning $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. ]

- Systemer av 1. ordens: $\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) \end{cases} \Rightarrow \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t)$

  hvis $A = (a_{ij})$ er konstant $\Rightarrow$ løs med egenverdiene og egenvektorene til $A$

  hvis $A(t)$ ikke er konstant, kan noen ganger løses.
  Kan også se på $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}$ for $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Hvis vi foretrekker å jobbe med systemer, så kan vi skrive om n-te ordens diffligning til et n-dimensjonalt system av 1. ordens ligninger:

Eks: $n = 2$, $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$

La $z(t) = y'(t) \Rightarrow z'(t) + p(t)z(t) + q(t)y(t) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -q(t)y(t) - p(t)z(t) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}$$

Lineære difflinger : generell form er lineærkombinasjon av $y, y', y'', \dots$ med koeffisienter som er konstante eller funksjoner.

Og lineære difflinger er generelt greie å jobbe med.

Ikke-lineære difflinger: Difflignen har minst ett ikke-lineært ledd

Eks.:
- potenser av $y(t)$ eller deriverte : $(y'(t))^3$
- produkter — " — : $y(t) \cdot y'(t)$
- funksjoner — " — : $\cos(y''(t))$

Generelt sett kan man ikke finne løsning til ikke-lineære difflinger analytisk, selv om det finnes eksempler hvor det er mulig (se eks. 1 i [Ørke])
Så vi har ingen generell oppskrift for å løse disse.

I praksis : numeriske metoder.

Faseplanet blir da nyttig for å studere mulige løsninger på et system.

Gode nyheter: å bruke de numeriske metodene er ikke vanskelig enn i lineære tilfeller.

Eksempel: Van der Pol-ligningen $\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$ hvor $\mu$ er et tall

La $y = \dot{x} \Rightarrow \dot{y} - \mu(1-x^2)y + x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1-x^2)y - x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x,y) = y \\ g(x,y) = \mu(1-x^2)y - x \end{array}$$

Ta en numerisk metode, f.eks. symplektisk Euler:
$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, y_i) = x_i + hy_i$$
$$y_{i+1} = y_i + hg(x_{i+1}, y_i) = y_i + h(\mu(1-x_{i+1}^2)y_i - x_{i+1})$$

Så hvis du har god på numeriske metoder med lineære ligninger, så er dette lett.

## Grensesykluser

Et fenomen som kan dukke opp når vi jobber med ikke-lineære difflinger.

En grensesyklus er en lukket bane i faseplanet til et system slik at minst én løsning går mot den når $t \to \infty$ (eller $t \to -\infty$)

Eksempel: Van der Pol-ligningen, bare skru opp antallet iterasjoner for å se.

For å finne ut om en diffligning har en grensesyklus kan man bruke teoremet under.

Lienard-ligningen: $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$

**Lienards teorem:** Anta at $f(x)$ og $g(x)$ tilfredstiller:

(i) $f$ og $g$ er kontinuerlig deriverbare [$f'$ og $g'$ finnes og er kontinuerlig]
(ii) $g$ er en odde funksjon [$g(-x) = -g(x)$]
(iii) $g(x) > 0$ for $x > 0$
(iv) $f$ er en jevn funksjon [$f(-x) = f(x)$]
(v) Funksjonen $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$ har nøyaktig ett nullpunkt $x = a$ for $x > 0$.
Og $F(x) < 0$ når $0 < x < a$ og $F(x) > 0$, $F'(x) \geq 0$ når $x > a$, med $F(x) \to \infty$ når $x \to \infty$.

Da har Lienard-ligningen en unik stabil grensesyklus rundt origo

[ Stabil = alle løsninger nær syklusen går mot syklusen når $t \to \infty$
Ustabil = — " — $t \to -\infty$ ]

Eksempel: Van der Pol-ligningen $\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$ for $\mu > 0$.

$f(x) = -\mu(1-x^2) \Rightarrow f'(x) = 2\mu x$ er kontinuerlig $\Rightarrow f$ kont. der. ✓
$f(-x) = -\mu(1-(-x)^2) = -\mu(1-x^2) = f(x) \Rightarrow f$ er jevn ✓

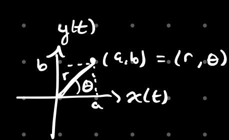
$g(x) = x$ er odde ✓ og $g(x) > 0$ når $x > 0$ ✓ og $g$ er kont. der. ✓

$F(x) = \int_0^x f(u)\,du = \int_0^x -\mu(1-u^2)\,du = \int_0^x -\mu + \mu u^2\,du = \left[-\mu u + \frac{\mu}{3}u^3\right]_0^x = -\mu x + \frac{\mu}{3}x^3 = \frac{\mu}{3}x(x^2-3)$

For $x > 0$ har vi $F(x) = \frac{\mu}{3}x(x^2-3) = 0$ bare når $x = \sqrt{3} = a$. ✓
Når $0 < x < \sqrt{3} \Rightarrow F(x) < 0$ ✓
Når $x > \sqrt{3} \Rightarrow F(x) > 0$ ✓ og $F'(x) = f(x) \geq 0$. ✓
Og $F(x) \to \infty$ når $x \to \infty$ ✓

$\Rightarrow$ Vi har en unik stabil grensesyklus rundt origo.

**Polarkoordinater**




Funker for difflikninger også. Da er det ganske lett å lage eksempler med grensesyklus:

Eksempel: $\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1-r^2) \\ 1 \end{bmatrix}$

Her er $r(t)$ og $\theta(t)$ er funksjoner av $t$
Vi har $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$, $y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$

Vi har $\dot{r} = r(1-r^2) = 0$ når $r = 1 > 0$. Altså når $r(t) = 1$ da er $r(t)$ konstant, så $r(t)$ har da sluttet å endre seg

$\dot{\theta} = 1$ er konstant så vi beveger oss bare i jevn hastighet mot klokka rundt origo.

Polarkoordinater funker som før, men bare være obs på at $r(t)$ og $\theta(t)$ er funksjoner.
E.g. hvis vi vil derivere $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ mhp $t$, da må du bruke produktregelen.