Partielle differensialligninger

Fram til nå: ordinære diffligninger (ODE), i.e. den ukjente er en funksjon av én variabel

I dag: leter etter funksjoner av flere variabler

Husk: hvis $u(x,y)$ er en funksjon av 2 variabler, er de partiellderiverte av u

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} = u_x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h} = u_y$$

Så en diffligning med $u(x,y)$ som ukjent vil ha partiellderiverte av u i ligningen, så ligningen er da et eksempel på en partiell diffligning (PDE)

Eksempler:

- bølgeligningen: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ hvor ukjent er $u(x,t)$ (posisjon, tid), c konst., 2.ordens
  beskriver bølger (vann, lyd, seismikk, ...)
- varmeligningen: $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ c konst., 2. ordens
  beskriver endring i varme
- laplaces ligning: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 2. ordens, uavhengig av t
  løsninger her kalles harmoniske funksjoner

For å løse PDE'er: finne generell løsning.

For å finne spesiell løsning, så trenger vi initialkrav $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$
Men det som er nytt er at vi også randkrav $u(a,t) = A$, $u(b,t) = B$ hvor a,b er endepunktene på et område vi er interessert i.

Randkravene beskriver funksjonen i de oppgitte posisjonene (uansett tid t), mens initialkravene beskriver hvordan hele funksjonen ser ut og hvordan den endrer seg ved starttiden.

Separasjon av variabler

Antar at løsningen ser ut som $u(x,t) = F(x)G(t)$, altså produktet av en funksjon som bare avhenger av x og en annen funksjon som bare avhenger av t.

Sett inn denne $u(x,t)$-en i diffligninen, da ender vi opp med 2 ordinære diffligninger som vi løser på vanlig vis.

Eksempel: Bølgeligningen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ randkrav $u(0,t) = u(L,t) = 0$ initialkrav $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$

Anta $u(x,t) = F(x)G(t)$, sett inn i ligningen

$$\Rightarrow \quad F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}$$

Her har vi en venstreside som bare avhenger av x og en høyreside som bare avhenger av t

Disse skal være like samme hvilke verdier av x og t vi bruker

$\Rightarrow$ begge sider er konstante

$$\Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = -k \qquad k \text{ konst.}$$

Dermed får vi:

- $\frac{F''(x)}{F(x)} = -k \quad \Rightarrow \quad F''(x) + kF(x) = 0$
- $\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = -k \quad \Rightarrow \quad G''(t) + kc^2 G(t) = 0$

Vi ser på $F''(x) + kF(x) = 0$ først. Vi tester hva som skjer basert på hva k kan være.

Viktig: vi vil å unngå den trivielle løsningen $u(x,t) \equiv 0$

- $k = 0$: $F''(x) = 0 \Rightarrow F(x) = Ax + B$

$$F(0)G(t) = u(0,t) = 0 \qquad \text{hvis } G(t) = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \ \ddot{\frown}$$
$$\Rightarrow F(0) = 0 = B \Rightarrow F(x) = Ax$$

$$F(L)G(t) = u(L,t) = 0 \quad \Rightarrow F(L) = 0 = AL \Rightarrow A = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \ \ddot{\frown}$$

- $k < 0$: $F'' + kF(x) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -k \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-k}$

$$\Rightarrow F(x) = Ae^{\sqrt{-k}x} + Be^{-\sqrt{-k}x}$$

$$\begin{aligned} F(0) &= A + B = 0 \\ F(L) &= Ae^{\sqrt{-k}L} + Be^{-\sqrt{-k}L} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-k}L} & e^{-\sqrt{-k}L} \end{bmatrix}}_{\det \neq 0} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \ \ddot{\frown}$$

- $k > 0$: $\lambda^2 = -k \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-k} = \pm\sqrt{k}\,i$

$$\Rightarrow F(x) = A\cos(\sqrt{k}x) + B\sin(\sqrt{k}x)$$

$$F(0) = A = 0 \Rightarrow F(x) = B\sin(\sqrt{k}x)$$

$$F(L) = \underset{\neq 0}{B}\sin(\sqrt{k}L) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{k}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{k}L = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (n<0 \text{ gir ikke noe nytt, } n=0 \text{ gir } k=0)$$

$$\Rightarrow F_n(x) = B_n' \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Endelig ser på $G''(t) + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G(t) = 0 \ \rightsquigarrow \ G_n(t) = A_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)$

$$\Rightarrow u_n(x,t) = G_n(t)F_n(x) = \left(A_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

[har ganget B_n' inn i parantesen og "absorbert" inn i A_n og B_n]

Superposisjon: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Initialkrav: • $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$

Husk: fourieranalyse, vi ser at rekken er fourierrekken til den odde utvidelsen av $f(x)$

Dermed er koeffisientene: $A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

• $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n \frac{cn\pi}{L}\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n \frac{cn\pi}{L}\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{cn\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)$ => fourierrekken til odde utv. av $g(x)$

OBS! Alt foran sin i rekken er fourierkoeffisienten (ikke bare B_n)

=> $B_n \frac{cn\pi}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

=> $B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Når separasjon av variabler brukes på andre PDE'er, så blir detaljene annerledes (de ordinære diff.ligningene blir annerledes, andre ting som blir 0).

Den generelle idéen:
- Sett $u(x,t) = F(x)G(t)$ inn i PDE'en
- Skriv om til til ODE'er
- Løs dem (bruk randkrav)
- Skriv generell løsning
- Bruk initialkravene + fourieranalyse
- Profit!!