Forrige uke: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y + 1$, f.eks.

Denne uken: $\vec{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ hvor $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ Finn en parametrisering for den rette linjen som ligger på både $x+2y+3z = 6$ og $x+y+z = 1$. (Hint: dette har du gjort i lineæralgebraen i forrige semester.)

Her kommer en annen viktig parametrisert kurve. Hvis du husker enhetssirkelen og tenker litt kreativt, går det nok bra. En ellipseliknings kanoniske form er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

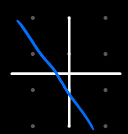
Det betyr at alle ellipser kan tilfredsstille en slik likning dersom man flytter sentrum til origo og legger halvaksene langs med koordinataksene.

$\boxed{3}$ Finn en parametrisering for en ellipse som tilfredsstiller likningen over.

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x - z = -4 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$

La $z = t \in \mathbb{R}$ være en fri variabelen $\Rightarrow$ $x(t) = t - 4$ og $y(t) = 5 - 2t$

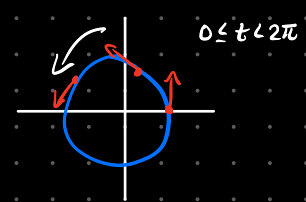
$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-4 \\ 5-2t \end{bmatrix}$



$\boxed{3}$ Enhetssirkelen: $x^2 + y^2 = 1$

Husk: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

La $x(t) = \cos(t)$ og $y(t) = \sin(t)$ $\longrightarrow$ $\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$



Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

La $x(t) = a \cdot \cos(t)$ og $y(t) = b \cdot \sin(t)$

$\Rightarrow \frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \frac{(a \cdot \cos(t))^2}{a^2} + \frac{(b \cdot \sin(t))^2}{b^2} = \frac{\cancel{a^2} \cdot \cos^2(t)}{\cancel{a^2}} + \frac{\cancel{b^2} \cdot \sin^2(t)}{\cancel{b^2}} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{bmatrix}$

Derivasjon: $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ tangentvektoren

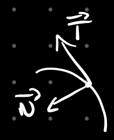
Regneregler: se ERT-filen $\frac{d}{dt}\left(\vec{x}(t) + \vec{y}(t)\right) = \dot{\vec{x}}(t) + \dot{\vec{y}}(t)$ ...

Norm: $\|\vec{\dot{x}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2}$

Hvis $\vec{x}(t)$ er posisjon, er $\|\vec{\dot{x}}(t)\|$ er farten

Enhets tangentvektoren: $\vec{T}(t) = \frac{\vec{\dot{x}}(t)}{\|\vec{\dot{x}}(t)\|}$

Enhets normal vektoren: $\vec{N}(t) = \frac{\vec{\dot{T}}(t)}{\|\vec{\dot{T}}(t)\|}$



Parametriseringen for en ellipse med halvakser a og b og sentrert i origo er

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{bmatrix}$$

der $0 \leq t < 2\pi$. Finn et uttrykk for

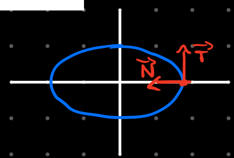
31 enhetstangentvektoren.

~~37 normalvektoren.~~

$\boxed{31}$ $\vec{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{bmatrix}$

$$\|\vec{\dot{x}}(t)\| = \sqrt{(-a\sin(t))^2 + (b\cos(t))^2}$$
$$= \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}$$

$$\Rightarrow \vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}} \begin{bmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{bmatrix}$$



$t = 0$

Tidligere: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kan snakke om kontinuitet og deriverbarhet

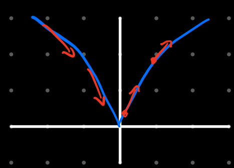
$\Rightarrow$ det samme for $f', f'', f^{(3)}, \ldots$

$\Rightarrow f$ er glatt hvis ∞ ganger deriverbar og hver $f^{(n)}$ er kontinuerlig

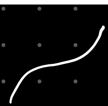
73 Tegn funksjonen

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

i python eller noe annet.



$f(x) = x^3$



$g(x) = x^2$

79 Hva skjer?

Det som skjer er at tangentvektoren forsvinner for $t = 0$, og da kan alt skje.

97 La x være som over, og vis at

$$\lim_{t\to 0^+} \mathrm{T}(t) \neq \lim_{t\to 0^-} \mathrm{T}(t)$$

$$\vec{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix} \qquad \|\vec{\dot{x}}(t)\| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = \sqrt{4t^2}\sqrt{\tfrac{9}{4}t^2 + 1}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t^2}\sqrt{\frac{9}{4}t^2+1}} \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to 0+} \vec{T}(t) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{\sqrt{4t^2}\sqrt{\frac{9}{4}t^2+1}} \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{2t\sqrt{\frac{9}{4}t^2+1}} \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}t^2+1}} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to 0-} \vec{T}(t) = \lim_{t\to 0-} \frac{1}{\sqrt{4t^2}\sqrt{\frac{9}{4}t^2+1}} \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0-} \frac{1}{-2t\sqrt{\frac{9}{4}t^2+1}} \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0-} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}t^2+1}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 = -(-1)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0+} T(t) \neq \lim_{t\to 0-} T(t)$$

$\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ er glatt hvis $\dot{\vec{x}}$ eksisterer (og kontinuerlig) og $\dot{\vec{x}} \neq \vec{0}$

Integrasjon:

- Buelengde: kurven Γ har buelengde $\int_\Gamma ds = \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\|\, dt$

  hvor $\vec{x}(t)$ er en param. av Γ med endepunkter $\vec{x}(a)$ og $\vec{x}(b)$
  (formelen funker for alle valg av param. $\vec{x}$)

311 Regn ut lengden av kurven

$$x(t) = \begin{bmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2\arctan t \end{bmatrix}$$

mellom $t = 0$ og $t = 2$.

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2}{1+t^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \|\dot{\vec{x}}(t)\| \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2+4}{(1+t^2)^2}} = 2\sqrt{\frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma ds = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \left[2\sinh^{-1}(t)\right]_0^2 = 2\left(\sinh^{-1}(2) - \sinh^{-1}(0)\right) \approx 2.8873\ldots$$

- Linjeintegral: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) \cdot \|\dot{\vec{x}}(t)\|\, dt$

719 En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} + x_1 x_2.$$

Hvor mye plankton spiser brugden på en runde rundt?

Param. av enhetssirkelen: $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2(t) = \sin(t)$ $\quad 0 \le t < 2\pi$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \Rightarrow \|\dot{\vec{x}}(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} f(x_1(t), x_2(t)) \cdot \|\dot{\vec{x}}(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(t)\sin(t)\right) \cdot 1 \cdot dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt + \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\, dt$$

(delwis int.)

$$= \left[\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} - 0 + 0 = \underline{\underline{\sqrt{2}\,\pi}}$$